Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Pierwiastki nieparzystego stopnia

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Pierwiastki w liczniku to -4 i 3, a w mianowniku -2. Otrzymujemy $\frac{-4+3}{-2} = \frac{1}{2}$. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $\sqrt[3]{-64} + \sqrt[5]{243}$.

Odpowiedź: -1

Otrzymujemy $-(4) + 3 = -1$.

2. Uprość $\frac{\sqrt[3]{-216}}{\sqrt[3]{8}}$.

Odpowiedź: -3

Łączymy pierwiastki: $\sqrt[3]{-27} = -3$.

3. Rozwiąż równanie $\sqrt[3]{x+27} = 4$.

Odpowiedź: 37

Potęgujemy obie strony do trzeciej potęgi: $x + 27 = 64$, stąd $x = 37$.

4. Liczby rzeczywiste u, v spełniają $u + v = 5$ i $uv = 1$. Oblicz $u^3 + v^3$.

Odpowiedź: 110

Ze wzoru $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v)$ otrzymujemy $125 - 3(5) = 110$.

5. Wiadomo, że $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = 5$ i $uv = 8$. Oblicz $u + v$.

Odpowiedź: 95

Oznaczamy pierwiastki przez p i q. Wtedy $pq = 2$. Zatem $u + v = p^3 + q^3 = (5)^3 - 6(5) = 95$.

6. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 3$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $(1, 8), (8, 1)$

Niech $u = \sqrt[3]{m}$, $v = \sqrt[3]{n}$. Po podniesieniu sumy do sześcianu $27 = m + n + 9uv$, więc $k = uv$ jest wymierny. Ponieważ $k^3 = mn$ jest całkowite, wymierność k wymusza jego całkowitość (skrócony mianownik musiałby dzielić licznik). Mamy $1 \le k \le 9/4$, zatem k=1 lub 2. Z $u^2 - 3u + k = 0$ dostajemy $m = u^3 = (9-k)u - 3k$, więc u jest wymierny, a jako pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej jest całkowity. Podobnie v. Dodatnie całkowite u,v o sumie 3 to 1 i 2, stąd m,n to 1 i 8 w obu kolejnościach.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $\sqrt[3]{-27}$.

Odpowiedź: -3

Ponieważ $(-3)^3 = -27$, pierwiastek wynosi -3.

2. Oblicz $\sqrt[5]{1024} - \sqrt[3]{27}$.

Odpowiedź: 1

Pierwiastki to 4 i 3; ich różnica wynosi 1.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $\sqrt[3]{27}$.

Odpowiedź: 3

$3^3 = 27$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-27}$.

Odpowiedź: -3

$(-3)^3 = -27$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{1024}$.

Odpowiedź: 4

$(4)^5 = 1024$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{216}/2$.

Odpowiedź: 3

Pierwiastek to $2 \cdot 3$; dzielimy przez 2.

Grupa B

1. Oblicz $\sqrt[3]{64}$.

Odpowiedź: 4

$4^3 = 64$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-64}$.

Odpowiedź: -4

$(-4)^3 = -64$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{3125}$.

Odpowiedź: 5

$(5)^5 = 3125$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{512}/2$.

Odpowiedź: 4

Pierwiastek to $2 \cdot 4$; dzielimy przez 2.

Grupa C

1. Oblicz $\sqrt[3]{125}$.

Odpowiedź: 5

$5^3 = 125$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-125}$.

Odpowiedź: -5

$(-5)^3 = -125$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{7776}$.

Odpowiedź: 6

$(6)^5 = 7776$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{1000}/2$.

Odpowiedź: 5

Pierwiastek to $2 \cdot 5$; dzielimy przez 2.

Grupa D

1. Oblicz $\sqrt[3]{216}$.

Odpowiedź: 6

$6^3 = 216$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-216}$.

Odpowiedź: -6

$(-6)^3 = -216$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{16807}$.

Odpowiedź: 7

$(7)^5 = 16807$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{1728}/2$.

Odpowiedź: 6

Pierwiastek to $2 \cdot 6$; dzielimy przez 2.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Obliczano $\sqrt[3]{-27}$.

Odpowiedź: -3

Pierwiastek nieparzystego stopnia zachowuje znak liczby pod nim.

2. Obliczano $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$.

Odpowiedź: 7

Pierwiastek nie rozdziela się przez dodawanie. Najpierw obliczamy każdy pierwiastek.

3. Rozwiązywano $\sqrt[3]{x} = 3$.

Odpowiedź: $x = 27$

Funkcja sześcienna jest różnowartościowa; nie dopisujemy drugiego znaku.

Grupa B

1. Obliczano $\sqrt[3]{-64}$.

Odpowiedź: -4

Pierwiastek nieparzystego stopnia zachowuje znak liczby pod nim.

2. Obliczano $\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{125}$.

Odpowiedź: 9

Pierwiastek nie rozdziela się przez dodawanie. Najpierw obliczamy każdy pierwiastek.

3. Rozwiązywano $\sqrt[3]{x} = 4$.

Odpowiedź: $x = 64$

Funkcja sześcienna jest różnowartościowa; nie dopisujemy drugiego znaku.

5 / Matematyka w świecie

1. Pudełko ma kształt sześcianu o objętości 27 dm^3. Oblicz krawędź i łączną długość 12 krawędzi.

Odpowiedź: 3 dm; 36 dm

$s = \sqrt[3]{27} = 3$ dm, a $12s = 36$ dm.

2. W umownym modelu kosztu $K = x^3$, gdzie x jest liczbą dodatnią, koszt wzrósł z 27 do 216 jednostek. Ile razy wzrosło x?

Odpowiedź: 2

Początkowo $x = 3$, potem $x = 6$. Iloraz wartości x wynosi 2.

3. Czujnik zapisuje przemieszczenie z jako $z = t^3$. Dla odczytu $z = -27$ wyznacz t i sprawdź znak.

Odpowiedź: -3

$t = \sqrt[3]{-27} = -3$. Ujemne t po potęgowaniu nieparzystym daje ujemny odczyt.

4. Zadanie odwrócone: $\sqrt[3]{N} - 3 = 2$. Odtwórz liczbę N.

Odpowiedź: 125

$\sqrt[3]{N} = 5$, więc $N = 125$.