# Klucz i wskazówki dla nauczyciela

**Znak iloczynu liniowego**

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

## Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Dzielimy przez -2 i odwracamy znak: $(x+3)(x-2) < 0$. Zera to $-3$ i 2. Iloczyn jest ujemny pomiędzy zerami. Końców nie włączamy, bo w nich iloczyn wynosi zero.

**Odpowiedź:** B

## 1 / Od schematu do wyzwania

**1.** Rozwiąż $(x-4)(x+4) \leq 0$.

**Odpowiedź:** $[-4, 4]$

Iloczyn ma znak niedodatni pomiędzy zerami, wraz z końcami.

**2.** Rozwiąż $x^2 - 8x + 16 < 1$.

**Odpowiedź:** $(3, 5)$

Mamy $(x-4)^2 < 1$, czyli $-1 < x - 4 < 1$.

**3.** Rozwiąż $x^2 - 16 > 0$.

**Odpowiedź:** $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

Parabola ma dodatnie wartości na zewnątrz miejsc zerowych. Ostra nierówność wyklucza końce.

**4.** Wypisz wszystkie całkowite rozwiązania $(x-4)(x-6) \leq 0$.

**Odpowiedź:** $\{4, 5, 6\}$

Rozwiązania rzeczywiste tworzą przedział $[4, 6]$. Są w nim trzy liczby całkowite.

**5.** Dla jakich rzeczywistych m nierówność $x^2 - 2mx + m^2 + 4 - m \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego rzeczywistego x?

**Odpowiedź:** $m \leq 4$

Lewą stronę zapisujemy jako $(x-m)^2 + 4 - m$. Najmniejsza wartość wynosi $4 - m$ i jest osiągana przy x=m. Musi być nieujemna, co daje warunek z odpowiedzi.

**6.** Wyznacz wszystkie rzeczywiste m, dla których nierówność $x^2 - 2mx + m^2 < 16$ ma dokładnie 7 rozwiązań całkowitych.

**Odpowiedź:** $m \in \mathbb{Z}$

Rozwiązania rzeczywiste tworzą otwarty przedział $(m-4, m+4)$. Gdy m jest całkowite, zawiera on kolejne liczby od $m-3$ do $m+3$, czyli 7 liczb. Gdy $m = k + t$, gdzie k jest całkowite i $0 < t < 1$, są to liczby od $k-3$ do $k+4$, czyli 8. Wymagany przypadek zachodzi wyłącznie dla całkowitych m.

## 2 / Małe kroki

**1.** Znajdź miejsca zerowe $x^2 - 16$.

**Odpowiedź:** $-4, 4$

Z równania $x^2 = 16$ otrzymujemy dwa przeciwne rozwiązania.

**2.** Jaki znak ma $x^2 + 4$ dla rzeczywistych x?

**Odpowiedź:** dodatni

Kwadrat jest nieujemny, a dodawana stała jest dodatnia.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

## 3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

**Grupa A**

**1.** Podaj zera $(x-4)(x+1)$.

**Odpowiedź:** $-1, 4$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

**2.** Rozwiąż $x^2 \leq 16$.

**Odpowiedź:** $[-4, 4]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

**3.** Czy $x = 4$ spełnia $x^2 < 16$?

**Odpowiedź:** nie

W punkcie granicznym występuje równość.

**4.** Jaki znak ma $(x-4)^2$?

**Odpowiedź:** nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

**Grupa B**

**1.** Podaj zera $(x-5)(x+1)$.

**Odpowiedź:** $-1, 5$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

**2.** Rozwiąż $x^2 \leq 25$.

**Odpowiedź:** $[-5, 5]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

**3.** Czy $x = 5$ spełnia $x^2 < 25$?

**Odpowiedź:** nie

W punkcie granicznym występuje równość.

**4.** Jaki znak ma $(x-5)^2$?

**Odpowiedź:** nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

**Grupa C**

**1.** Podaj zera $(x-6)(x+1)$.

**Odpowiedź:** $-1, 6$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

**2.** Rozwiąż $x^2 \leq 36$.

**Odpowiedź:** $[-6, 6]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

**3.** Czy $x = 6$ spełnia $x^2 < 36$?

**Odpowiedź:** nie

W punkcie granicznym występuje równość.

**4.** Jaki znak ma $(x-6)^2$?

**Odpowiedź:** nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

**Grupa D**

**1.** Podaj zera $(x-7)(x+1)$.

**Odpowiedź:** $-1, 7$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

**2.** Rozwiąż $x^2 \leq 49$.

**Odpowiedź:** $[-7, 7]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

**3.** Czy $x = 7$ spełnia $x^2 < 49$?

**Odpowiedź:** nie

W punkcie granicznym występuje równość.

**4.** Jaki znak ma $(x-7)^2$?

**Odpowiedź:** nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

## 4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

**Grupa A**

**1.** Rozwiązywano $x^2 < 16$.

**Odpowiedź:** $-4 < x < 4$

Trzeba uwzględnić także ujemną granicę.

**2.** Rozwiązywano $(x-4)(x+4) > 0$.

**Odpowiedź:** $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

Parabola skierowana w górę jest dodatnia na zewnątrz zer.

**3.** Rozwiązanie $(x-4)^2 \leq 0$.

**Odpowiedź:** $x = 4$

Kwadrat może być równy zeru; nierówność nieostra dopuszcza tę wartość.

**Grupa B**

**1.** Rozwiązywano $x^2 < 25$.

**Odpowiedź:** $-5 < x < 5$

Trzeba uwzględnić także ujemną granicę.

**2.** Rozwiązywano $(x-5)(x+5) > 0$.

**Odpowiedź:** $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

Parabola skierowana w górę jest dodatnia na zewnątrz zer.

**3.** Rozwiązanie $(x-5)^2 \leq 0$.

**Odpowiedź:** $x = 5$

Kwadrat może być równy zeru; nierówność nieostra dopuszcza tę wartość.

## 5 / Matematyka w świecie

**1.** Prostokąt ma boki x i $x+4$ metrów, x>0. Jego pole nie może przekroczyć 32 $m^2$. Wyznacz dopuszczalne x.

**Odpowiedź:** $0 < x \leq 4$

$x(x+4) \leq 32$ daje $(x-4)(x+8) \leq 0$. Przecinamy otrzymany przedział z x>0.

**2.** Model zysku to $Z(n) = -(n-4)^2 + 16$ dla całkowitego n≥0. Przy jakich n zysk jest nieujemny?

**Odpowiedź:** $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$

$(n-4)^2 \leq 16$, więc $0 \leq n \leq 8$. Wybieramy liczby całkowite.

**3.** W ćwiczeniowym modelu wysokość $h(t) = -t^2 + 8t$. Dla jakich nieujemnych chwil h jest dodatnia?

**Odpowiedź:** $0 < t < 8$

$h(t) = t(8-t)$. Iloczyn jest dodatni pomiędzy zerami 0 i 8.

**4.** Zadanie odwrócone: rozwiązaniem $x^2 < c$ jest dokładnie przedział $(-4, 4)$. Wyznacz c.

**Odpowiedź:** 16

Granice są równe $\pm\sqrt{c}$, zatem $\sqrt{c} = 4$ i $c = 16$.