Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Równanie wymierne z przedziałem

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Oznaczamy $t = x+0$. Równanie ma postać $\frac{3t+4}{t-1} = \frac{t+3}{3t}$. Po pomnożeniu przez mianowniki mamy $9t^2+12t = t^2+2t-3$, czyli $8t^2 + 10t + 3 = 0$. Rozkład $(4t + 3)(2t + 1) = 0$ daje $t = -\frac{3}{4}$ lub $t = -\frac{1}{2}$. Stąd $x = -\frac{3}{4}$ lub $x = -\frac{1}{2}$. Obie liczby spełniają wykluczenia, ale tylko pierwsza należy do wskazanego przedziału.

Odpowiedź: $x = -\frac{3}{4}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Rozwiąż $\frac{x+4}{x-4} = 2$.

Odpowiedź: 12

$x \neq 4$. Po pomnożeniu $x + 4 = 2x - 8$, więc $x = 12$, co nie zeruje mianownika.

2. Rozwiąż $\frac{x+4}{x-4} = 3$.

Odpowiedź: 8

$x \neq 4$. Równanie daje $x + 4 = 3x - 12$, stąd $2x = 16$ i $x = 8$.

3. Rozwiąż $\frac{x+8}{x-4} = \frac{x+8}{8}$.

Odpowiedź: $x = -8$ lub $x = 12$

$x \neq 4$. Po pomnożeniu przez mianowniki: $(x + 8)(8 - (x - 4)) = 0$. Stąd $x = -8$ albo $x = 12$. Oba wyniki spełniają wykluczenie.

4. Rozwiąż nierówność $\frac{x-4}{x+4} > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

Wykluczamy $x = -4$. Iloraz jest dodatni, gdy licznik i mianownik mają te same znaki, co zachodzi w dwóch zewnętrznych przedziałach. $x = 4$ daje zero, więc też go nie włączamy.

5. W zależności od rzeczywistego b rozwiąż $\frac{(x-4)(x-b)}{x-4} = 0$.

Odpowiedź: $x = b$ dla $b \neq 4$; $\varnothing$ dla $b = 4$

Wykluczenie $x \neq 4$ obowiązuje także po skróceniu. Dostajemy $x - b = 0$. Gdy $b \neq 4$, jest to dopuszczalny pierwiastek. Gdy $b = 4$, jedyna kandydatura jest wykluczona.

6. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y) spełniające $1/x + 1/y = 1/4$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(5, 20), (6, 12), (8, 8), (12, 6), (20, 5)\}$

Obie liczby muszą przekraczać 4, bo każdy dodatni składnik jest mniejszy od sumy. Po pomnożeniu przez $4xy$ otrzymujemy $xy = 4(x+y)$, czyli $(x-4)(y-4) = 16$. Każdy dodatni dzielnik d liczby 16 daje dokładnie jedną uporządkowaną parę $x = 4 + d$, $y = 4 + 16/d$. Przegląd wszystkich dzielników daje odpowiedź.

2 / Małe kroki

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x - 4)$.

Odpowiedź: $x \neq 4$

Mianownik nie może być zerem.

2. Uprość $4x/4$.

Odpowiedź: x

Skracamy niezerowy czynnik 4.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x - 4)$.

Odpowiedź: $x \neq 4$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/4 + 1/4$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/4$ dla $x = 8$.

Odpowiedź: 2

$8/4 = 2$.

4. Uprość $(x-4)/(x-4)$ dla $x \neq 4$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa B

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-5)$.

Odpowiedź: $x \neq 5$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/5 + 1/5$.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/5$ dla $x = 10$.

Odpowiedź: 2

$10/5 = 2$.

4. Uprość $(x-5)/(x-5)$ dla $x \neq 5$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa C

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-6)$.

Odpowiedź: $x \neq 6$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/6 + 1/6$.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/6$ dla $x = 12$.

Odpowiedź: 2

$12/6 = 2$.

4. Uprość $(x-6)/(x-6)$ dla $x \neq 6$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa D

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-7)$.

Odpowiedź: $x \neq 7$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/7 + 1/7$.

Odpowiedź: $\frac{2}{7}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/7$ dla $x = 14$.

Odpowiedź: 2

$14/7 = 2$.

4. Uprość $(x-7)/(x-7)$ dla $x \neq 7$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Upraszczano $(x+4)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+4/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-16)/(x-4)$.

Odpowiedź: $x+4,\ x\neq 4$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-4)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

Grupa B

1. Upraszczano $(x+5)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+5/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-25)/(x-5)$.

Odpowiedź: $x+5,\ x\neq 5$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-5)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

5 / Matematyka w świecie

1. Koszt wykonania n sztuk to $K(n)=4n+100$. Wyraź średni koszt jednej sztuki dla n>0.

Odpowiedź: $4+\frac{100}{n}$

Dzielimy koszt całkowity przez n: $K(n)/n=4+100/n$.

2. Cena hurtowa za n sztuk wynosi $4n+16$ zł. Ile wynosi średnia cena dla $n=4$?

Odpowiedź: 8

Średnia to $4+16/n$, czyli po podstawieniu 8 zł.

3. W roztworze jest 8 g substancji w 4 litrach. Wyraź stężenie $c(V)=8/V$ i oblicz je po dolaniu 4 litrów wody.

Odpowiedź: 1

Nowa objętość wynosi 8 l, a masa substancji się nie zmienia. $c=8/8=1$ g/l.

4. Zadanie odwrócone: średni koszt $4+100/n$ wyniósł 9 zł. Wyznacz dodatnie n.

Odpowiedź: 20

$100/n=5$, zatem $n=20$.