Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Przekątne równoległoboku

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Punkt A to przecięcie prostych: $\frac{1}{2}x + 9 = 4x + (-5)$. Otrzymujemy $A = (4, 11)$. Ponieważ K jest środkiem AB, $B = 2K - A = (16, 17)$. Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy, więc S jest środkiem BD: $S = (11, 18)$.

Odpowiedź: $S = (11, 18)$

1 / Od schematu do wyzwania

1. W równoległoboku ABCD bok AB leży na y=3, a AD na y=3 x−6. Dane: D=(6,12), środek AB to K=(9,3). Wyznacz przecięcie przekątnych.

Odpowiedź: $(\frac{21}{2}, \frac{15}{2})$

Przecięcie prostych daje $A = (3, 3)$. Z $B = 2K - A$ otrzymujemy $B = (15, 3)$. Środek BD to $(\frac{21}{2}, \frac{15}{2})$.

2. W równoległoboku A=(3,3), B=(15,3), D=(6,12). Wyznacz C i pole równoległoboku.

Odpowiedź: $C = (18, 12);\ P = 108$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. C=B+D−A=(6 k,4 k). Podstawa AB ma 4 k, a odległość D od prostej y=k wynosi 3 k. Pole to 12 k².

3. S=(0,0) jest przecięciem przekątnych równoległoboku. A=(3,6), B=(9,-3). Wyznacz C,D i środek AB.

Odpowiedź: $C = (-3, -6), D = (-9, 3);\ K = (6, \frac{3}{2})$

Ponieważ S jest środkiem obu przekątnych, C=−A i D=−B. Środek AB liczymy jako średnie współrzędnych.

4. Przekątna kwadratu ma końce A=(0,0), C=(18,24). Wyznacz dwa pozostałe wierzchołki.

Odpowiedź: $(-3, 21),\ (21, 3)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Środek S=(3 k,4 k). Połowa przekątnej to wektor (3 k,4 k). Obracamy go o 90 stopni: (-4 k,3 k). Wierzchołki S±ten wektor to (-k,7 k) i (7 k,k).

5. Wykaż, że środkowe dowolnego trójkąta o wierzchołkach A,B,C przecinają się w punkcie $G = (A + B + C)/3$ (współrzędne liczymy osobno).

Odpowiedź: $G = (A + B + C)/3$

Środek BC to D=(B+C)/2. Punkt A+2/3(D-A)=(A+B+C)/3 leży na środkowej AD. Identyczny rachunek dla środkowej z B daje ten sam punkt, więc G jest ich przecięciem.

6. Kwadrat ma przekątną o końcach (0,0) i (u,v), gdzie u,v są całkowite i nie są oba zerem. Wyznacz warunek konieczny i wystarczający, aby pozostałe wierzchołki miały całkowite współrzędne.

Odpowiedź: u i v mają tę samą parzystość.

Pozostałe wierzchołki to $((u-v)/2, (v+u)/2)$ i $((u+v)/2, (v-u)/2)$: otrzymujemy je przez obrót połowy przekątnej o 90 stopni wokół jej środka. Obie współrzędne są całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy u+v i u-v są parzyste, czyli u,v mają tę samą parzystość.

2 / Małe kroki

1. K=(9,3) jest środkiem AB, A=(3,3). Wyznacz B.

Odpowiedź: $(15, 3)$

Ze wzoru na środek B=2 K−A.

2. Przekątne równoległoboku mają końce B=(15,3), D=(6,12). Wyznacz ich punkt przecięcia.

Odpowiedź: $(\frac{21}{2}, \frac{15}{2})$

Przekątne dzielą się na połowy, więc ich przecięcie jest środkiem BD.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz odległość (0,0) od (9,12).

Odpowiedź: 15

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(6,12).

Odpowiedź: $(3, 6)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 3. Oblicz pole.

Odpowiedź: 9

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(6,0),(0,3). Oblicz pole.

Odpowiedź: 9

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t^2.

Grupa B

1. Oblicz odległość (0,0) od (12,16).

Odpowiedź: 20

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(8,16).

Odpowiedź: $(4, 8)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 4. Oblicz pole.

Odpowiedź: 16

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(8,0),(0,4). Oblicz pole.

Odpowiedź: 16

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t^2.

Grupa C

1. Oblicz odległość (0,0) od (15,20).

Odpowiedź: 25

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(10,20).

Odpowiedź: $(5, 10)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 5. Oblicz pole.

Odpowiedź: 25

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(10,0),(0,5). Oblicz pole.

Odpowiedź: 25

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t^2.

Grupa D

1. Oblicz odległość (0,0) od (18,24).

Odpowiedź: 30

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(12,24).

Odpowiedź: $(6, 12)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 6. Oblicz pole.

Odpowiedź: 36

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(12,0),(0,6). Oblicz pole.

Odpowiedź: 36

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t².

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $A = (3, 3)$, a $K = (9, 3)$ jest środkiem AB.

Odpowiedź: $B = (15, 3)$

Ze wzoru na środek odcinka wynika $B = 2K - A$, a nie $K - A$.

2. W równoległoboku $B = (12, 0)$ i $D = (3, 9)$.

Odpowiedź: $(\frac{15}{2}, \frac{9}{2})$

Przekątne przecinają się w środku BD. Trzeba podzielić sumy współrzędnych przez 2.

3. Boki AB i AD zawierają się w prostych $y = 3$ i $y = 2x - 3$.

Odpowiedź: $A = (3, 3)$

Punkt A leży na obu prostych. Równanie $3 = 2x - 3$ daje $x = 3$, a $y = 3$.

Grupa B

1. $A = (4, 4)$, a $K = (12, 4)$ jest środkiem AB.

Odpowiedź: $B = (20, 4)$

Ze wzoru na środek odcinka wynika $B = 2K - A$, a nie $K - A$.

2. W równoległoboku $B = (16, 0)$ i $D = (4, 12)$.

Odpowiedź: $(10, 6)$

Przekątne przecinają się w środku BD. Trzeba podzielić sumy współrzędnych przez 2.

3. Boki AB i AD zawierają się w prostych $y = 4$ i $y = 2x - 4$.

Odpowiedź: $A = (4, 4)$

Punkt A leży na obu prostych. Równanie $4 = 2x - 4$ daje $x = 4$, a $y = 4$.

5 / Matematyka w świecie

1. Na planie punkt startu to (0,0), a cel (9,12); jednostka to 1 m. Oblicz długość najkrótszego odcinka łączącego punkty.

Odpowiedź: 15 m

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Odległość euklidesowa wynosi 5 k.

2. Kwadratowy panel ma kolejne narożniki (0,0) i (9,12) w dm. Oblicz ilość materiału potrzebnego do pokrycia panelu.

Odpowiedź: 225 dm^2

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Długość boku wynosi 5 k, więc pole 25 k².

3. W modelu ruchu punkt przeszedł z (0,0) do (18,24) mm. Znajdź środek odcinka łączącego pozycje.

Odpowiedź: $(9, 12)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Średnie współrzędnych wynoszą 3 k i 4 k.

4. Trójkątny teren ma wierzchołki (0,0),(a,0),(0,9) w metrach. Jego pole wynosi 54 m². Odtwórz dodatnie a.

Odpowiedź: $a = 12$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. $a \cdot 9/2 = 54$. Rozwiązanie równania daje a=4 k.