Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Okrąg ze średnicy

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Środek średnicy to $S = (2, 0)$. Kwadrat odległości SA wynosi $1 + 1 = 2$. Równanie okręgu ma więc postać $(x - 2)^2 + y^2 = 2$.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Odcinek A=(-8,-4), B=(16,28) jest średnicą. Wyznacz równanie okręgu.

Odpowiedź: $(x - 4)^2 + (y - 12)^2 = 400$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Środek to (k,3 k). Różnice końców wynoszą 6 k i 8 k, więc średnica ma 10 k, a promień 5 k.

2. Okrąg ma równanie $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 400$. Sprawdź, czy P=(16,-20) leży na okręgu.

Odpowiedź: Tak.

Kwadrat odległości od środka to $(12)^2 + (-16)^2 = 400$, czyli r^2.

3. Okrąg $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 400$ odbito względem osi Oy. Zapisz równanie obrazu.

Odpowiedź: $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 400$

Odbicie zmienia znak pierwszej współrzędnej środka; promień pozostaje ten sam.

4. Okrąg ma środek (4,-4) i jest styczny do osi Ox. Wyznacz jego równanie i punkty przecięcia osi Oy.

Odpowiedź: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16;\ (0, -4)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Promień jest odległością środka od Ox, czyli k. Dla x=0 równanie daje $(y+k)^2=0$; jedyny punkt to (0,-k).

5. Wykaż, że środki wszystkich okręgów przechodzących przez różne punkty A i B leżą na symetralnej AB.

Odpowiedź: Są jednakowo odległe od A i B.

Jeżeli S jest środkiem takiego okręgu, SA i SB są promieniami, zatem SA=SB. Zbiór punktów równoodległych od końców odcinka to jego symetralna.

6. A=(-4,0), B=(4,0). Wyznacz zbiór wszystkich punktów P spełniających $PA^2 + PB^2 = 64$ i uzasadnij jego kształt.

Odpowiedź: $x^2 + y^2 = 16$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Dla P=(x,y) suma kwadratów wynosi $(x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2 = 2x^2+2y^2+32$. Równość z 64 jest równoważna $x^2 + y^2 = 16$. To okrąg o środku (0,0) i promieniu k.

2 / Małe kroki

1. Okrąg ma środek (4,-4) i promień 20. Zapisz równanie.

Odpowiedź: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 400$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Stosujemy $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ z a=k,b=-k,r=5 k.

2. Odcinek A=(-8,-4), B=(16,28) jest średnicą. Wyznacz środek okręgu.

Odpowiedź: $(4, 12)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Środek średnicy ma współrzędne będące średnimi końców: (k,3 k).

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Okrąg: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(4, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2 + y^2 = 16$. Podaj promień.

Odpowiedź: 4

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 8. Podaj promień.

Odpowiedź: 4

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (4,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-4, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa B

1. Okrąg: $(x-5)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(5, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=25$. Podaj promień.

Odpowiedź: 5

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 10. Podaj promień.

Odpowiedź: 5

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (5,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-5, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa C

1. Okrąg: $(x-6)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(6, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=36$. Podaj promień.

Odpowiedź: 6

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 12. Podaj promień.

Odpowiedź: 6

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (6,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-6, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa D

1. Okrąg: $(x-7)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(7, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=49$. Podaj promień.

Odpowiedź: 7

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 14. Podaj promień.

Odpowiedź: 7

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (7,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-7, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. S=(2,-3), promień 4.

Odpowiedź: $(x-2)^2+(y+3)^2=16$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

2. S=(0,0), promień 4.

Odpowiedź: $x^2+y^2=16$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

3. S=(2,-3), odbicie względem Oy.

Odpowiedź: $(-2,-3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

Grupa B

1. S=(2,-3), promień 5.

Odpowiedź: $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

2. S=(0,0), promień 5.

Odpowiedź: $x^2+y^2=25$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

3. S=(2,-3), odbicie względem Oy.

Odpowiedź: $(-2,-3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

5 / Matematyka w świecie

1. Okrągła rabata ma środek (4,-4) i promień 20 m na planie. Zapisz równanie jej brzegu.

Odpowiedź: $(x-4)^2+(y+4)^2=400$

Podstawiamy środek i kwadrat promienia do standardowego równania.

2. Końcami średnicy okrągłej tablicy są (-8,-4) i (16,28) dm. Oblicz pole powierzchni do pokrycia folią.

Odpowiedź: 400π dm^2

Przyjmijmy pomocniczo $k=4$. Średnica ma długość 10 k, promień 5 k, a pole 25πk².

3. Tor w płaskim modelu ma równanie $(x-4)^2+(y+4)^2=400$ w cm. Czy punkt (16,-20) leży na torze?

Odpowiedź: Tak.

Przyjmijmy pomocniczo $k=4$. Po podstawieniu kwadrat odległości od środka jest równy 25 k², tak jak prawa strona równania.

4. Brzeg okrągłego obszaru opisuje równanie $(x-4)^2+(y+4)^2=400$. Odtwórz środek i średnicę.

Odpowiedź: $S=(4,-4);\ d=40$

Środek odczytujemy z nawiasów. Promień jest pierwiastkiem prawej strony, a średnica jest dwa razy większa.