Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Powierzchnia i kąt stożka

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Pole boczne wynosi $\pi rl = 18\pi$, a podstawa ma pole $\pi r^2 = 9\pi$. Stosunek jest równy 2. W połowie przekroju osiowego $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{l} = \frac{1}{2}$. Połowa kąta rozwarcia ma $30°$, więc cały kąt ma $60°$. Odpowiedź: PP.

Odpowiedź: PP

1 / Od schematu do wyzwania

1. Promień stożka ma długość 6, a wysokość 8. Oblicz tworzącą i pole całkowite.

Odpowiedź: $10;\ 96\pi$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Tworząca: $\sqrt{(9\,k^2+16\,k^2)}=5\,k$. Pole całkowite: $\pi r^2+\pi rl=9\pi k^2+15\pi k^2=24\pi k^2$.

2. Tworząca stożka wynosi 10, a pole podstawy 36π. Oblicz wysokość i objętość.

Odpowiedź: $8;\ 96\pi$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Z pola podstawy promień wynosi 3 k. Wysokość: $\sqrt{(25\,k^2-9\,k^2)}=4\,k$. Objętość: $\pi\cdot 9\,k^2\cdot 4\,k/3=12\pi k^3$.

3. Stożek ma tworzącą 4 i kąt rozwarcia $60°$. Oblicz promień i wysokość.

Odpowiedź: $2;\ 2\sqrt{3}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Połowa przekroju osiowego ma kąt 30 stopni. Promień to $l\cdot\sin 30=k$, a wysokość $l\cdot\cos 30=k\sqrt{3}$.

4. Stożek i walec mają ten sam promień 6 i tę samą wysokość 8. O ile objętość walca jest większa od objętości stożka?

Odpowiedź: 192π

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Walec ma objętość $36\pi k^3$, a stożek $12\pi k^3$. Różnica wynosi $24\pi k^3$.

5. Wykaż, że przekrój osiowy stożka jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy jego pole boczne jest dwa razy większe od pola podstawy.

Odpowiedź: $P_b = 2P_p \iff l = 2r$

Warunek pól $\pi rl=2\pi r^2$, po skróceniu dodatniego πr, jest równoważny $l=2r$. Przekrój ma boki $l,l,2r$, więc jest równoboczny dokładnie przy tej równości.

6. Tworząca stożka ma stałą długość 10. Wyznacz promień i wysokość stożka o największej objętości. Uzasadnij bez pochodnych.

Odpowiedź: $r = 10\sqrt{2/3},\ h = 10/\sqrt{3}$

Niech $x=r^2$ i $y=h^2$. Mamy $x+y=l^2$ i $V^2=\pi^2x^2y/9$. Nierówność średnich dla $x/2,x/2,y$ daje $x^2y\le 4(l^2/3)^3$. Równość zachodzi dla $x/2=y$, czyli $r^2=2\,h^2$. Łącząc to z $r^2+h^2=l^2$ dostajemy $h=l/\sqrt{3}$ i $r=l\sqrt{(2/3)}$.

2 / Małe kroki

1. Stożek ma promień 6 i wysokość 8. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 96π

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. $V = \pi r^2h/3 = 12\pi k^3$.

2. Promień stożka wynosi 6, a tworząca 10. Oblicz pole boczne.

Odpowiedź: 60π

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. $P_b = \pi rl = 15\pi k^2$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Promień 2, wysokość 3. Oblicz V stożka.

Odpowiedź: 4π

Stosujemy $V=\pi r^2h/3$.

2. Promień 2. tworzaca 4. Oblicz P_c.

Odpowiedź: 8π

Pole boczne to πrl.

3. Promień 6, wysokość 8. Podaj tworzącą.

Odpowiedź: 10

Z Pitagorasa otrzymujemy proporcję 3:4:5.

4. Ile podstaw ma stożek?

Odpowiedź: 1

Stożek ma jedną kołową podstawę.

Grupa B

1. Promień 3, wysokość 3. Oblicz V stożka.

Odpowiedź: 9π

Stosujemy $V=\pi r^2h/3$.

2. Promień 3, tworząca 6. Oblicz P_b.

Odpowiedź: 18π

Pole boczne to πrl.

3. Promień 9, wysokość 12. Podaj tworzącą.

Odpowiedź: 15

Z Pitagorasa otrzymujemy proporcję 3:4:5.

4. Ile podstaw ma stożek?

Odpowiedź: 1

Stożek ma jedną kołową podstawę.

Grupa C

1. Promień 4, wysokość 3. Oblicz V stożka.

Odpowiedź: 16π

Stosujemy $V=\pi r^2h/3$.

2. Promień 4, tworząca 8. Oblicz P_b.

Odpowiedź: 32π

Pole boczne to πrl.

3. Promień 12, wysokość 16. Podaj tworzącą.

Odpowiedź: 20

Z Pitagorasa otrzymujemy proporcję 3:4:5.

4. Ile podstaw ma stożek?

Odpowiedź: 1

Stożek ma jedną kołową podstawę.

Grupa D

1. Promień 5, wysokość 3. Oblicz V stożka.

Odpowiedź: 25π

Stosujemy $V=\pi r^2h/3$.

2. Promień 5, tworząca 10. Oblicz P_b.

Odpowiedź: 50π

Pole boczne to πrl.

3. Promień 15, wysokość 20. Podaj tworzącą.

Odpowiedź: 25

Z Pitagorasa otrzymujemy proporcję 3:4:5.

4. Ile podstaw ma stożek?

Odpowiedź: 1

Stożek ma jedną kołową podstawę.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Promień 2, wysokość 3.

Odpowiedź: 4π

Pominięto dzielenie przez 3.

2. Promień 6, wysokość 8.

Odpowiedź: 10

Tworząca jest przeciwprostokątną, więc stosujemy sumę kwadratów, nie sumę długości.

3. Promień 2, tworząca 4.

Odpowiedź: 12π

Podany wynik to tylko pole boczne; trzeba dodać pole podstawy πt^2.

Grupa B

1. Promień 3, wysokość 3.

Odpowiedź: 9π

Pominięto dzielenie przez 3.

2. Promień 9, wysokość 12.

Odpowiedź: 15

Tworząca jest przeciwprostokątną, więc stosujemy sumę kwadratów, nie sumę długości.

3. Promień 3, tworząca 6.

Odpowiedź: 27π

Podany wynik to tylko pole boczne; trzeba dodać pole podstawy πt^2.

5 / Matematyka w świecie

1. Stożkowy lejek modelowy ma promień 6 cm i wysokość 8 cm. Oblicz jego pojemność geometryczną.

Odpowiedź: 96π cm^3

Korzystamy ze wzoru $V=\pi r^2 h/3$.

2. Stożkowy daszek ma promień 6 dm i tworzącą 10 dm. Ile dm^2 blachy wymaga sama powierzchnia boczna?

Odpowiedź: 60π dm^2

Pole boczne to πrl.

3. W modelu doświadczenia usypano stożek o promieniu 6 mm i wysokości 8 mm. Oblicz jego tworzącą.

Odpowiedź: 10 mm

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Z Pitagorasa $l^2=r^2+h^2$ otrzymujemy $l=5$ k.

4. Stożkowe naczynie ma objętość 96π cm^3 i promień 6 cm. Odtwórz wysokość.

Odpowiedź: 8 cm

Przekształcamy wzór do $h=3\,V/(\pi r^2)$.