Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Walec z przekroju osiowego

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

W trójkącie prostokątnym ABD mamy $h = 4\sqrt{3}\sin 30^\circ = 2\sqrt{3}$ i $2r = 4\sqrt{3}\cos 30^\circ = 6$, więc $r = 3$. Stosujemy $V = \pi r^2 h = 18\pi\sqrt{3}$ i $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $V = 18\pi\sqrt{3}$, $P_c = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Walec ma promień 6 i wysokość 8. Oblicz objętość i pole całkowite.

Odpowiedź: $288\pi;\ 168\pi$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. V=πr²h=36πk³. Dwie podstawy mają pole 18πk², a bok 24πk². Razem 42πk².

2. Przekrój osiowy walca ma boki 12 i 8; dłuższy jest średnicą. Oblicz promień i przekątną przekroju.

Odpowiedź: $6;\ 4\sqrt{13}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Promień jest połową średnicy: 3 k. Przekątna prostokąta wynosi √(36 k²+16 k²)=2 k√13.

3. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $8\sqrt{3}$ i tworzy z jego średnicą kąt 30 stopni. Oblicz promień i objętość.

Odpowiedź: $6;\ 144\pi\sqrt{3}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Wysokość to d·sin 30=2 k√3. Średnica to d·cos 30=6 k, więc r=3 k. Objętość wynosi π·9 k²·2 k√3=18πk³√3.

4. Walec ma objętość 288π i wysokość 8. Oblicz promień, a następnie pole całkowite.

Odpowiedź: $6;\ 168\pi$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Z równania V=πr²h dostajemy r²=9 k² i r=3 k. Po podstawieniu do 2πr²+2πrh otrzymujemy 42πk².

5. Wykaż, że walec o przekroju osiowym kwadratowym ma pole boczne dwukrotnie większe od sumy pól obu podstaw.

Odpowiedź: $P_b = 2(2P_p)$

Kwadratowy przekrój oznacza h=2 r. Pole boczne wynosi 2πr·2 r=4πr², a dwie podstawy 2πr². Ich stosunek to 2.

6. Pole całkowite walca wynosi 24π. Wyznacz wymiary dające największą objętość i uzasadnij bez pochodnych.

Odpowiedź: $r = 2,\ h = 4;\ V_{max} = 16\pi$

Warunek daje r²+rh=12. Stosujemy nierówność średnich do r²,rh/2,rh/2. Ich iloczyn to r⁴h²/4 i nie przekracza $(4)^3$. Stąd V²=π²r⁴h²≤256π². Równość wymaga r²=rh/2=4, czyli r=2, h=4.

2 / Małe kroki

1. Walec ma promień 6 i wysokość 8. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 288π

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. $V = \pi r^2 h = 36\pi k^3$.

2. Walec ma promień 6 i wysokość 8. Oblicz pole boczne.

Odpowiedź: 96π

Rozwinięcie boku to prostokąt 2πr na h, więc P_b=2πrh.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Promień walca 2, wysokość 2. Oblicz V.

Odpowiedź: 8π

V=πr²h.

2. Promień walca 2. Podaj jego średnicę.

Odpowiedź: 4

Średnica jest dwa razy większa od promienia.

3. Promień 2, wysokość 2. Oblicz P_b.

Odpowiedź: 8π

$P_b = 2\pi rh.$

4. Średnica 4, wysokość 2. Podaj promień.

Odpowiedź: 2

Promień to połowa średnicy.

Grupa B

1. Promień walca 3, wysokość 2. Oblicz V.

Odpowiedź: 18π

V=πr²h.

2. Promień walca 3. Podaj jego średnicę.

Odpowiedź: 6

Średnica jest dwa razy większa od promienia.

3. Promień 3, wysokość 2. Oblicz P_b.

Odpowiedź: 12π

$P_b = 2\pi rh.$

4. Średnica 6, wysokość 3. Podaj promień.

Odpowiedź: 3

Promień to połowa średnicy.

Grupa C

1. Promień walca 4, wysokość 2. Oblicz V.

Odpowiedź: 32π

V=πr²h.

2. Promień walca 4. Podaj jego średnicę.

Odpowiedź: 8

Średnica jest dwa razy większa od promienia.

3. Promień 4, wysokość 2. Oblicz P_b.

Odpowiedź: 16π

$P_b = 2\pi rh.$

4. Średnica 8, wysokość 4. Podaj promień.

Odpowiedź: 4

Promień to połowa średnicy.

Grupa D

1. Promień walca 5, wysokość 2. Oblicz V.

Odpowiedź: 50π

V=πr²h.

2. Promień walca 5. Podaj jego średnicę.

Odpowiedź: 10

Średnica jest dwa razy większa od promienia.

3. Promień 5, wysokość 2. Oblicz P_b.

Odpowiedź: 20π

$P_b = 2\pi rh.$

4. Średnica 10, wysokość 5. Podaj promień.

Odpowiedź: 5

Promień to połowa średnicy.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Walec ma średnicę 4 i wysokość 3.

Odpowiedź: 12π

Uczeń użył średnicy zamiast promienia. Promień wynosi t.

2. Promień walca 2, wysokość 2.

Odpowiedź: 16π

Podany wynik jest polem bocznym; trzeba dodać dwie podstawy.

3. Przekrój osiowy walca jest kwadratem.

Odpowiedź: $h = 2r$

Szerokość przekroju osiowego jest średnicą 2 r.

Grupa B

1. Walec ma średnicę 6 i wysokość 3.

Odpowiedź: 27π

Uczeń użył średnicy zamiast promienia. Promień wynosi t.

2. Promień walca 3, wysokość 2.

Odpowiedź: 30π

Podany wynik jest polem bocznym; trzeba dodać dwie podstawy.

3. Przekrój osiowy walca jest kwadratem.

Odpowiedź: $h = 2r$

Szerokość przekroju osiowego jest średnicą 2 r.

5 / Matematyka w świecie

1. Cylindryczny pojemnik ma promień 6 cm i wysokość 8 cm. Oblicz geometryczną pojemność.

Odpowiedź: 288π cm^3

Stosujemy V=πr²h.

2. Etykieta zakrywa bok puszki o promieniu 6 cm i wysokości 8 cm. Oblicz powierzchnię jednej etykiety.

Odpowiedź: 96π cm^2

Po rozwinięciu etykieta ma wymiary 2πr oraz h.

3. W doświadczeniu próbkę modeluje się walcem o promieniu 6 mm i wysokości 8 mm. Oblicz sumę pól dwóch podstaw.

Odpowiedź: 72π mm^2

Dwie podstawy mają pole 2πr².

4. Walec o wysokości 8 cm mieści 288π cm³. Odtwórz średnicę.

Odpowiedź: 12 cm

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Ze wzoru objętości r²=9 k², więc r=3 k, a średnica 6 k.