# Klucz i wskazówki dla nauczyciela

**Średnia ważona wieku**

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

## Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Jeśli w drugiej szkole jest n uczniów, to w pierwszej jest $3n$. Suma ich wieków wynosi $9 \cdot 3n + 13n$. Dzielimy przez $4n$ i dostajemy $\frac{40}{4} = 10$. Odpowiedź: A.

**Odpowiedź:** A

## 1 / Od schematu do wyzwania

**1.** Oblicz średnią ważoną: wartości $4, 6, 7$ mają wagi $2, 3, 4$.

**Odpowiedź:** $6$

Ważona suma wartości to 54, a suma wag 9. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**2.** Oblicz średnią ważoną: wartości $4, 5, 7$ mają wagi $3, 2, 1$.

**Odpowiedź:** $\frac{29}{6}$

Ważona suma wartości to 29, a suma wag 6. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**3.** Wartości 4 i 8 mają wagi 2 i x. Średnia ważona wynosi 7. Wyznacz dodatnią wagę x.

**Odpowiedź:** $6$

$2 \cdot 4 + x(8) = (2 + x)(7)$, więc x=6.

**4.** Grupa 4 osób ma średni wiek 15, a grupa n osób 21. Łączna średnia to 19. Wyznacz n.

**Odpowiedź:** $8$

$4(15) + n(21) = (4 + n)(19)$, więc $2n = 16$ i n=8.

**5.** Sześć liczb ma średnią 5. Cztery z nich mają średnią 4. Czy pozostałe dwie muszą mieć tę samą wartość? Wyznacz ich średnią.

**Odpowiedź:** Nie; średnia 7.

Suma pozostałych to $6 \cdot 5 - 4(4) = 2(7)$. Ich średnia to 7, ale same liczby mogą być różne, np.6 i 8.

**6.** Udowodnij, że średnia połączonych dwóch niepustych grup leży pomiędzy ich średnimi. Kiedy równa się prostemu uśrednieniu tych średnich?

**Odpowiedź:** $\bar{x} = (na + mb)/(n + m)$

Dla a≤b mamy $a(n+m) \leq na+mb \leq b(n+m)$. Dzielenie przez dodatnie n+m daje tezę. Równość $(na+mb)/(n+m) = (a + b)/2$ jest równoważna $(n - m)(a - b) = 0$, więc zachodzi, gdy n=m lub a=b.

## 2 / Małe kroki

**1.** Oblicz średnią ważoną: wartości $2, 4$ mają wagi $1, 1$.

**Odpowiedź:** $3$

Ważona suma wartości to 6, a suma wag 2. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**2.** Oblicz średnią ważoną: wartości $2, 4$ mają wagi $1, 2$.

**Odpowiedź:** $\frac{10}{3}$

Ważona suma wartości to 10, a suma wag 3. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

## 3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

**Grupa A**

**1.** Oblicz średnią ważoną: wartości $3, 5$ mają wagi $1, 1$.

**Odpowiedź:** $4$

Ważona suma wartości to 8, a suma wag 2. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**2.** Oblicz średnią ważoną: wartości $3, 6$ mają wagi $2, 1$.

**Odpowiedź:** $4$

Ważona suma wartości to 12, a suma wag 3. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**3.** Wagi 3 ocen wynoszą 2,3,4. Podaj sumę wag.

**Odpowiedź:** $9$

$2+3+4=9$. Wynik: $9$.

**4.** Oblicz średnią ważoną: wartości $3, 5$ mają wagi $1, 3$.

**Odpowiedź:** $\frac{9}{2}$

Ważona suma wartości to $18$, a suma wag $4$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**Grupa B**

**1.** Oblicz średnią ważoną: wartości $4, 6$ mają wagi $1, 1$.

**Odpowiedź:** $5$

Ważona suma wartości to $10$, a suma wag $2$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**2.** Oblicz średnią ważoną: wartości $4, 7$ mają wagi $2, 1$.

**Odpowiedź:** $5$

Ważona suma wartości to $15$, a suma wag $3$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**3.** Wagi 3 ocen wynoszą 2,3,4. Podaj sumę wag.

**Odpowiedź:** $9$

$2+3+4=9$. Wynik: $9$.

**4.** Oblicz średnią ważoną: wartości $4, 6$ mają wagi $1, 3$.

**Odpowiedź:** $\frac{11}{2}$

Ważona suma wartości to $22$, a suma wag $4$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**Grupa C**

**1.** Oblicz średnią ważoną: wartości $5, 7$ mają wagi $1, 1$.

**Odpowiedź:** $6$

Ważona suma wartości to $12$, a suma wag $2$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**2.** Oblicz średnią ważoną: wartości $5, 8$ mają wagi $2, 1$.

**Odpowiedź:** $6$

Ważona suma wartości to $18$, a suma wag $3$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**3.** Wagi 3 ocen wynoszą 2,3,4. Podaj sumę wag.

**Odpowiedź:** $9$

$2+3+4=9$. Wynik: $9$.

**4.** Oblicz średnią ważoną: wartości $5, 7$ mają wagi $1, 3$.

**Odpowiedź:** $\frac{13}{2}$

Ważona suma wartości to $26$, a suma wag $4$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**Grupa D**

**1.** Oblicz średnią ważoną: wartości $6, 8$ mają wagi $1, 1$.

**Odpowiedź:** $7$

Ważona suma wartości to $14$, a suma wag $2$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**2.** Oblicz średnią ważoną: wartości $6, 9$ mają wagi $2, 1$.

**Odpowiedź:** $7$

Ważona suma wartości to $21$, a suma wag $3$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

**3.** Wagi 3 ocen wynoszą 2,3,4. Podaj sumę wag.

**Odpowiedź:** $9$

$2+3+4=9$. Wynik: $9$.

**4.** Oblicz średnią ważoną: wartości $6, 8$ mają wagi $1, 3$.

**Odpowiedź:** $\frac{15}{2}$

Ważona suma wartości to $30$, a suma wag $4$. Dzielimy sumę ważoną przez sumę wag.

## 4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

**Grupa A**

**1.** 2 liczby mają średnią 5, a 4 liczby średnią 9.

**Odpowiedź:** $\frac{23}{3}$

Trzeba uwzględnić różne liczebności grup.

**2.** Suma 5 liczb to 25.

**Odpowiedź:** $5$

Dzielimy przez 5, nie przez 4.

**3.** Średnia 3 liczb wynosi 5.

**Odpowiedź:** $15$

Aby odzyskać sumę, mnożymy średnią przez liczbę danych.

**Grupa B**

**1.** 2 liczby mają średnią 6, a 4 liczby średnią 10.

**Odpowiedź:** $\frac{26}{3}$

Trzeba uwzględnić różne liczebności grup.

**2.** Suma 5 liczb to 30.

**Odpowiedź:** $6$

Dzielimy przez 5, nie przez 4.

**3.** Średnia 3 liczb wynosi 6.

**Odpowiedź:** $18$

Aby odzyskać sumę, mnożymy średnią przez liczbę danych.

## 5 / Matematyka w świecie

**1.** 3 treningi trwały średnio 25 min, a 2 kolejne średnio 35 min. Oblicz średni czas 5 treningów.

**Odpowiedź:** $29$min

Suma:$3(25)+2(35)$; dzielimy przez 5.

**2.** Sprzedano 2 produkty po 40 zł i 3 po 60 zł. Oblicz średnią cenę sprzedanej sztuki.

**Odpowiedź:** $52$zł

Łączny przychód dzielimy przez 5 sztuk. Wagi to liczby sprzedanych sztuk.

**3.** 4 rośliny mają średnią wysokość 15 cm, a 6 innych 20 cm. Oblicz średnią z 10 roślin.

**Odpowiedź:** $18$cm

$(4a + 6b)/10$ daje podaną średnią. Dane modelowe.

**4.** Średnia 5 pomiarów wynosi 6. Pierwsze 4 mają średnią 5. Wyznacz piąty pomiar.

**Odpowiedź:** $10$

$x = 5(6) - 4 \cdot 5 = 10.$