Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Procent składany

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Po każdym roku mnożymy kwotę przez $1{,}06$. Po dwóch latach odejmujemy wpłatę. Otrzymujemy $10000\cdot(\frac{53}{50})^2-10000 = 1236$ zł. Odpowiedź: B.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Kapitał 2000 jednostek rośnie o 7% rocznie. Oblicz przyrost po dwóch latach z corocznym doliczaniem odsetek.

Odpowiedź: $\frac{1449}{5}$

Po dwóch latach stan wynosi $2000(\frac{107}{100})^2$. Odejmujemy początkowe 2000; przyrost to $\frac{1449}{5}$ jednostek.

2. Kwotę 2000 zwiększono kolejno o 7% i 8%. Oblicz kwotę końcową.

Odpowiedź: $\frac{11556}{5}$

Oba wzrosty dotyczą kolejnych aktualnych kwot: $2000 \cdot \frac{107}{100} \cdot \frac{27}{25} = \frac{11556}{5}$.

3. Kapitał 2000 rośnie o 7% rocznie. Po pierwszym roku wypłacono 100 jednostek. Jaki będzie stan po drugim roku?

Odpowiedź: $\frac{10914}{5}$

Po roku jest 2140. Po wypłacie zostaje 2040. Mnożymy tę wartość przez $\frac{107}{100}$; wynik to $\frac{10914}{5}$.

4. Cenę zwiększono o 7%, a potem obniżono o 7%. O ile procent jest teraz niższa od pierwotnej?

Odpowiedź: $\frac{49}{100}$

Łączny mnożnik to $(1+7/100)(1-7/100) = 1-49/10000$. Ubytek jako procent wartości początkowej wynosi $\frac{49}{100}$%.

5. Wykaż, że kolejność dwóch podwyżek o r% i s% nie zmienia wyniku. Wyraź łączny wzrost procentowy.

Odpowiedź: $r + s + \frac{rs}{100}$

W obu kolejnościach mnożnik wynosi $(1 + r/100)(1 + s/100)$, bo mnożenie jest przemienne. Po rozwinięciu jest to $1 + (r + s)/100 + rs/10000$, więc wzrost procentowy ma wartość $r + s + rs/100$.

6. Dwie nieujemne roczne stopy r%, s% sumują się do 20%. Wykaż, że dwuletni wzrost kapitału nie przekroczy 21%. Kiedy zachodzi równość?

Odpowiedź: $r = s = 10$

Łączny wzrost procentowy to $r + s + rs/100 = 20 + rs/100$. Ze $(r - s)^2 \geq 0$ i $r + s = 20$ wynika $rs \leq 100$. Stąd podana granica wzrostu. Równość w nierówności kwadratowej zachodzi dokładnie dla $r = s = 10$.

2 / Małe kroki

1. Oblicz 10% kwoty 200 zł.

Odpowiedź: 20

$200 \cdot 10/100 = 20$ zł.

2. Kwotę 200 zł zwiększono o 10%. Podaj nową kwotę.

Odpowiedź: 220

Mnożymy przez $1 + 10/100 = 11/10$ i otrzymujemy 220 zł.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz 10% liczby 200.

Odpowiedź: 20

Dzielimy liczbę przez 10.

2. Zwiększ 200 o 10%.

Odpowiedź: 220

Dodajemy 10% liczby, czyli 20.

3. Obniż 200 o 20%.

Odpowiedź: 160

Mnożymy przez $80/100$.

4. Jaki mnożnik odpowiada wzrostowi o 7%?

Odpowiedź: $\frac{107}{100}$

Nowa wartość to stara wartość pomnożona przez 1 powiększone o stopę w zapisie ułamkowym.

Grupa B

1. Oblicz 10% liczby 300.

Odpowiedź: 30

Dzielimy liczbę przez 10.

2. Zwiększ 300 o 10%.

Odpowiedź: 330

Dodajemy 10% liczby, czyli 30.

3. Obniż 300 o 20%.

Odpowiedź: 240

Mnożymy przez $80/100$.

4. Jaki mnożnik odpowiada wzrostowi o 8%?

Odpowiedź: $\frac{27}{25}$

Nowa wartość to stara wartość pomnożona przez 1 powiększone o stopę w zapisie ułamkowym.

Grupa C

1. Oblicz 10% liczby 400.

Odpowiedź: 40

Dzielimy liczbę przez 10.

2. Zwiększ 400 o 10%.

Odpowiedź: 440

Dodajemy 10% liczby, czyli 40.

3. Obniż 400 o 20%.

Odpowiedź: 320

Mnożymy przez $80/100$.

4. Jaki mnożnik odpowiada wzrostowi o 9%?

Odpowiedź: $\frac{109}{100}$

Nowa wartość to stara wartość pomnożona przez 1 powiększone o stopę w zapisie ułamkowym.

Grupa D

1. Oblicz 10% liczby 500.

Odpowiedź: 50

Dzielimy liczbę przez 10.

2. Zwiększ 500 o 10%.

Odpowiedź: 550

Dodajemy 10% liczby, czyli 50.

3. Obniż 500 o 20%.

Odpowiedź: 400

Mnożymy przez $80/100$.

4. Jaki mnożnik odpowiada wzrostowi o 10%?

Odpowiedź: $\frac{11}{10}$

Nowa wartość to stara wartość pomnożona przez 1 powiększone o stopę w zapisie ułamkowym.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Cenę 100 zł zwiększono o 7%.

Odpowiedź: 107 zł

Obliczono sam przyrost; trzeba dodać go do ceny początkowej.

2. Kwota K rosła dwa razy o 7%.

Odpowiedź: $K(1+7/100)^2$

Drugi wzrost nalicza się od już powiększonej kwoty.

3. Cenę zwiększono i zmniejszono o 7%.

Odpowiedź: $K(1-49/10000)$

Procent obniżki jest liczony od większej podstawy. Wzrost i spadek nie znoszą się.

Grupa B

1. Cenę 100 zł zwiększono o 8%.

Odpowiedź: 108 zł

Obliczono sam przyrost; trzeba dodać go do ceny początkowej.

2. Kwota K rosła dwa razy o 8%.

Odpowiedź: $K(1+8/100)^2$

Drugi wzrost nalicza się od już powiększonej kwoty.

3. Cenę zwiększono i zmniejszono o 8%.

Odpowiedź: $K(1-64/10000)$

Procent obniżki jest liczony od większej podstawy. Wzrost i spadek nie znoszą się.

5 / Matematyka w świecie

1. Cenę sprzętu 2000 zł obniżono kolejno o 10% i 20%. Oblicz nową cenę.

Odpowiedź: 1440

Łączny mnożnik to $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$. Cena wynosi 1440 zł.

2. Umowny model oszczędności przewiduje wzrost 2000 jednostek o 7% rocznie przez dwa lata. Oblicz stan; pomiń podatki i zaokrąglenia.

Odpowiedź: $\frac{11449}{5}$

$K = 2000(\frac{107}{100})^2 = \frac{11449}{5}$ jednostek.

3. W ćwiczeniowym modelu liczebność wynosi 200, a w każdym cyklu maleje o 20%. Ile wyniesie po trzech cyklach?

Odpowiedź: $\frac{512}{5}$

Trzykrotnie mnożymy przez $4/5$: $N = 200(4/5)^3 = \frac{512}{5}$.

4. Zadanie odwrócone: po dwóch wzrostach o 7% kwota wynosi $\frac{11449}{5}$. Odtwórz kwotę początkową.

Odpowiedź: 2000

Dzielimy stan końcowy przez mnożnik $(\frac{107}{100})^2$, otrzymując 2000.