Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Parabola i przesunięcie

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Zapisujemy $f(x) = a(x-3)^2 + (-2)$. Warunek $g(0) = 0$ oznacza $f(1) = 0$. Podstawienie daje $4a + (-2) = 0$, więc $a = \frac{1}{2}$. Rozwijając nawias, otrzymujemy $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (-3)x + \frac{5}{2}$.

Odpowiedź: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (-3)x + \frac{5}{2}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. $f(x) = (x-2)^2 - 4$. Wyznacz wierzchołek i zera $g(x) = f(x+2)$.

Odpowiedź: $W = (0, -4),\ x = -2, 2$

$g(x) = (x-(0))^2 - 4$. Wierzchołek i oba zera przesuwają się o 2 w lewo.

2. Wierzchołek f to $(2, 3)$. Gdzie leży wierzchołek $g(x) = f(x-2) + 5$?

Odpowiedź: $(4, 8)$

Przesunięcie jest o 2 w prawo i o 5 w górę.

3. $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = f(x+s)$. Wyznacz s, gdy wierzchołek g ma x=1.

Odpowiedź: $s = 1$

Argument nowego wierzchołka wynosi p-s. Rozwiązujemy $2 - s = 1$.

4. $f(x) = (x-2)^2$. Rozwiąż $f(x) = f(x+2)$.

Odpowiedź: $x = 1$

Po odjęciu kwadratów dostajemy $-4(x-2) - 4 = 0$, stąd x=1.

5. Wykaż, że wykresy $f(x) = (x-2)^2$ i $g(x) = f(x-2)$ przecinają się na osi symetrii leżącej w połowie między ich osiami.

Odpowiedź: $x = 3,\ y = 1$

Równość $(x-2)^2 = (x-4)^2$ daje $x = 3$. Wartość obu funkcji wynosi 1; jest to środek między osiami x=2 i x=4.

6. Sklasyfikuj liczbę rzeczywistych rozwiązań równania $((x-2)^2 - 4)^2 = m$ zależnie od m. Uzasadnij przejścia między przypadkami.

Odpowiedź: 0 dla m<0; 2 dla m=0; 4 dla 0<m<16; 3 dla m=16; 2 dla m>16.

Zewnętrzny kwadrat daje $(x-2)^2 = 4 \pm \sqrt{m}$. Każda dodatnia prawa strona daje dwa x, zerowa jedno, ujemna żadnego. Dla m=0 obie gałęzie są tą samą. Granica drugiej gałęzi to m=16.

2 / Małe kroki

1. Wierzchołek f to $(2, 1)$. Podaj wierzchołek $f(x-1)$.

Odpowiedź: $(3, 1)$

Przesunięcie w prawo o 1.

2. $f(x) = x^2$. Zapisz wzór po przesunięciu o 2 w lewo.

Odpowiedź: $g(x) = (x+2)^2$

Przesunięcie w lewo realizuje zastąpienie x przez x+s.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $f(x) = (x-2)^2$. Podaj argument minimum.

Odpowiedź: 2

Minimum kwadratu występuje, gdy x-p=0.

2. Wykres $f(x-2)$ przesuwamy w lewo czy w prawo względem f?

Odpowiedź: W prawo.

Zastąpienie x przez x-2 oznacza przesunięcie w prawo o 2.

3. Wierzchołek f to $(2, 1)$. Podaj wierzchołek $f(x + 1)$.

Odpowiedź: $(1, 1)$

Argument wierzchołka maleje o 1, wartość pozostaje bez zmian.

4. $f(2) = 0$ i $g(x) = f(x + 2)$. Podaj jedno zero g.

Odpowiedź: 0

Wystarczy $x + 2 = 2$.

Grupa B

1. $f(x) = (x - 3)^2$. Podaj argument minimum.

Odpowiedź: 3

Minimum kwadratu występuje, gdy x-p=0.

2. Wykres $f(x - 3)$ przesuwamy w lewo czy w prawo względem f?

Odpowiedź: W prawo.

Zastąpienie x przez x-3 oznacza przesunięcie w prawo o 3.

3. Wierzchołek f to $(3, 1)$. Podaj wierzchołek $f(x + 1)$.

Odpowiedź: $(2, 1)$

Argument wierzchołka maleje o 1, wartość pozostaje bez zmian.

4. $f(2) = 0$ i $g(x) = f(x + 3)$. Podaj jedno zero g.

Odpowiedź: -1

Wystarczy $x + 3 = 2$.

Grupa C

1. $f(x) = (x - 4)^2$. Podaj argument minimum.

Odpowiedź: 4

Minimum kwadratu występuje, gdy x-p=0.

2. Wykres $f(x - 4)$ przesuwamy w lewo czy w prawo względem f?

Odpowiedź: W prawo.

Zastąpienie x przez x-4 oznacza przesunięcie w prawo o 4.

3. Wierzchołek f to $(4, 1)$. Podaj wierzchołek $f(x + 1)$.

Odpowiedź: $(3, 1)$

Argument wierzchołka maleje o 1, wartość pozostaje bez zmian.

4. $f(2) = 0$ i $g(x) = f(x + 4)$. Podaj jedno zero g.

Odpowiedź: -2

Wystarczy $x + 4 = 2$.

Grupa D

1. $f(x) = (x - 5)^2$. Podaj argument minimum.

Odpowiedź: 5

Minimum kwadratu występuje, gdy x-p=0.

2. Wykres $f(x - 5)$ przesuwamy w lewo czy w prawo względem f?

Odpowiedź: W prawo.

Zastąpienie x przez x-5 oznacza przesunięcie w prawo o 5.

3. Wierzchołek f to $(5, 1)$. Podaj wierzchołek $f(x + 1)$.

Odpowiedź: $(4, 1)$

Argument wierzchołka maleje o 1, wartość pozostaje bez zmian.

4. $f(2) = 0$ i $g(x) = f(x + 5)$. Podaj jedno zero g.

Odpowiedź: -3

Wystarczy $x + 5 = 2$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = f(x-2)$. Uczeń podaje wierzchołek g.

Odpowiedź: $(4, 0)$

Wzór daje $g(x) = (x-4)^2$; przesunięcie jest w prawo.

2. Wierzchołek f to $(2, 1)$. Uczeń przesuwa wykres o 2 w górę.

Odpowiedź: $(2, 3)$

Przesunięcie pionowe zmienia drugą, a nie pierwszą współrzędną.

3. $g(x) = f(x+2)$. Uczeń opisuje przesunięcie.

Odpowiedź: W lewo o 2.

Argumenty odpowiadające tym samym wartościom są mniejsze o h.

Grupa B

1. $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = f(x-3)$. Uczeń podaje wierzchołek g.

Odpowiedź: $(6, 0)$

Wzór daje $g(x) = (x-6)^2$; przesunięcie jest w prawo.

2. Wierzchołek f to $(3, 1)$. Uczeń przesuwa wykres o 2 w górę.

Odpowiedź: $(3, 3)$

Przesunięcie pionowe zmienia drugą, a nie pierwszą współrzędną.

3. $g(x) = f(x+3)$. Uczeń opisuje przesunięcie.

Odpowiedź: W lewo o 3.

Argumenty odpowiadające tym samym wartościom są mniejsze o h.

5 / Matematyka w świecie

1. Profil przeszkody to $f(x) = (x-4)^2$. Po przesunięciu go o 3 m w prawo zapisz nowy profil g.

Odpowiedź: $g(x) = (x-7)^2$

Przesunięcie w prawo opisuje $g(x) = f(x-3)$.

2. Model przychodu to $R(x) = -(x-4)^2 + 100$. Sprzedaż po zmianie warunków opisuje $S(x) = R(x+2)$. Dla jakiego x przychód S jest największy?

Odpowiedź: 2

Argument funkcji R ma wynosić 4, więc $x + 2 = 4$.

3. W modelu $T(t) = (t-4)^2 + 5$ minimum jest chwilą reakcji. Drugi eksperyment ma przebieg $U(t) = T(t-1)$. Kiedy wystąpi jego minimum?

Odpowiedź: 5

Przesunięcie o 1 w prawo daje argument minimum 5.

4. Profil $g(x) = (x-7)^2$ powstał przez przesunięcie $f(x) = (x-4)^2$. Odtwórz kierunek i długość przesunięcia.

Odpowiedź: 3 jednostki w prawo.

Porównujemy argumenty wierzchołków; ich różnica wynosi 3.