Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Iloczyny wyrazów ciągu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Ze wzoru $a_n = a_1 q^{n-1}$ mamy $a_3 a_6 = a_1^2 q^7$ i $a_2 a_7 = a_1^2 q^7$. Iloczyny są równe, więc wynik to 18.

Odpowiedź: 18

1 / Od schematu do wyzwania

1. $a_1 = 3, q = -3$. Oblicz a_5 i określ znak a_6.

Odpowiedź: $a_5 = 243$; a_6 ujemny.

$a_5 = 3(-3)^4 = 243$. Potęga ilorazu przy a_6 ma nieparzysty wykładnik 5.

2. $a_2 = 9, a_4 = 81$ oraz q>0. Wyznacz q i a_1.

Odpowiedź: $q = 3, a_1 = 3$

Iloraz $a_4/a_2 = q^2 = 9$, więc q=3. Następnie $a_1 = a_2/q = 3$.

3. W dodatnim ciągu geometrycznym $a_3 = 3$. Oblicz iloczyn $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

Odpowiedź: 243

Wyrazy symetryczne spełniają $a_1 a_5 = a_3^2$ i $a_2 a_4 = a_3^2$. Cały iloczyn to $a_3^5 = 243$.

4. $a_1 = 3, q = 2$. Wyznacz n, jeśli $a_n = 96$.

Odpowiedź: $n = 6$

$3 \cdot 2^{n-1} = 96$, więc $2^{n-1} = 32 = 2^5$ i n=6.

5. Wykaż, że dla trzech dodatnich kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego zachodzi $a_1 + a_3 \geq 2a_2$. Ustal równość.

Odpowiedź: Równość dokładnie dla q=1.

$a_1 + a_3 - 2a_2 = a_1(1 + q^2 - 2q) = a_1(q-1)^2 \geq 0$. Ponieważ a_1>0, równość wymaga q=1.

6. Znajdź wszystkie rosnące trójki dodatnich liczb całkowitych tworzących ciąg geometryczny, którego środkowy wyraz wynosi 7.

Odpowiedź: $(1, 7, 49)$

Dla trójki (u,7,w) mamy $uw = 49$. Wybieramy wszystkie dodatnie dzielniki u liczby 49 mniejsze od 7; wtedy $w = 49/u > 7$. To daje dokładnie wypisane trójki.

2 / Małe kroki

1. $a_1 = 3, q = 2$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 12

$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$.

2. $a_1 = 3, a_2 = 9$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 3

$q = 9/3 = 3$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $a_1 = 3, q = 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 6

$a_2 = a_1 q = 6$.

2. Początek: $3, 6, 12$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 2

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 3

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 3, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 3

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

Grupa B

1. $a_1 = 4, q = 3$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 12

$a_2 = a_1 q = 12$.

2. Początek: $4, 12, 36$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 3

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 4

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 4, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 4

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

Grupa C

1. $a_1 = 5, q = 4$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 20

$a_2 = a_1 q = 20$.

2. Początek: $5, 20, 80$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 4

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 5

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 5, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 5

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

Grupa D

1. $a_1 = 6, q = 5$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 30

$a_2 = a_1 q = 30$.

2. Początek: $6, 30, 150$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 5

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 6

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 6, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 6

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $a_1 = 3, q = 2$. Uczeń liczy a_4.

Odpowiedź: $a_4 = 24$

Od a_1 do a_4 wykonujemy trzy mnożenia przez q, więc wykładnik wynosi 3.

2. $a_1 = 3, a_2 = 6$. Wyznaczono iloraz.

Odpowiedź: $q = 2$

Odwrócono iloraz. Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy, nie pierwszy przez drugi.

3. $a_1 = 3, q = -2$. Obliczono a_2.

Odpowiedź: $a_2 = -6$

Przy mnożeniu dodatniego wyrazu przez ujemny iloraz wynik jest ujemny.

Grupa B

1. $a_1 = 4, q = 3$. Uczeń liczy a_4.

Odpowiedź: $a_4 = 108$

Od a_1 do a_4 wykonujemy trzy mnożenia przez q, więc wykładnik wynosi 3.

2. $a_1 = 4, a_2 = 12$. Wyznaczono iloraz.

Odpowiedź: $q = 3$

Odwrócono iloraz. Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy, nie pierwszy przez drugi.

3. $a_1 = 4, q = -2$. Obliczono a_2.

Odpowiedź: $a_2 = -8$

Przy mnożeniu dodatniego wyrazu przez ujemny iloraz wynik jest ujemny.

5 / Matematyka w świecie

1. Warstwy konstrukcji mają kolejno $5, 10, 20, \ldots$ elementów. Ile ma piąta warstwa w tym modelu?

Odpowiedź: 80

$a_5 = 5 \cdot 2^4 = 80$.

2. Umowny kapitał 500 zł co okres mnoży się przez 2. Jaki jest po trzech okresach? Pomijamy podatki.

Odpowiedź: 4000 zł

Wykonujemy trzy mnożenia: $500 \cdot 2^3 = 4000$.

3. W uproszczonym modelu populacja zaczyna od 5 jednostek i podwaja się co etap. Ile będzie po czterech etapach?

Odpowiedź: 80

Po czterech mnożeniach liczebność wynosi $5 \cdot 2^4 = 80$.

4. Dodatni ciąg geometryczny ma $a_1 = 5$ i $a_3 = 45$. Odtwórz dodatni iloraz q.

Odpowiedź: 3

$a_3 = a_1 q^2$ daje $q^2=9$. Przy $q>0$ otrzymujemy $q=3$.