Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Sinus w trójkącie prostokątnym

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Naprzeciw kąta leży AB. Z Pitagorasa $AB = \sqrt{40-4} = 6$. Zatem $\sin\gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 15, a $\sin\alpha = 3/5$. Oblicz obie przyprostokątne.

Odpowiedź: $9,\ 12$

Bok naprzeciw: $15 \cdot 3/5 = 9$. Drugi: $\sqrt{225-81} = 12$.

2. Przyprostokątne mają długości 9 i 12. Oblicz sinus, cosinus i tangens kąta naprzeciw krótszego boku.

Odpowiedź: $\frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{3}{4}$

Przeciwprostokątna ma długość 15. Ilorazy wynoszą $9/15 = 3/5$, $12/15 = 4/5$, $9/12 = 3/4$.

3. Przeciwprostokątna ma długość 15, a tangens jednego z kątów ostrych wynosi $3/4$. Oblicz pole trójkąta.

Odpowiedź: 54

Boki mają proporcje 3:4:5, zatem przyprostokątne to 9 i 12. Pole: $9 \cdot 12/2 = 54$.

4. Przeciwprostokątna ma długość 15, a suma przyprostokątnych wynosi 21. Oblicz pole bez wyznaczania boków.

Odpowiedź: 54

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, więc $2ab = 441 - 225 = 216$. Pole $ab/2 = 54$.

5. Wykaż, że suma przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej c nie przekracza $c\sqrt{2}$. Kiedy jest równość?

Odpowiedź: $a + b \le c\sqrt{2};\ a = b$

$(a-b)^2 \ge 0$ daje $2ab \le a^2 + b^2 = c^2$. Stąd $(a+b)^2 = c^2 + 2ab \le 2c^2$. Dodatniość boków pozwala spierwiastkować. Równość zachodzi dokładnie dla $a = b$.

6. Wyznacz wszystkie trójkąty prostokątne o obwodzie 36 i przeciwprostokątnej 15. Uzasadnij jednoznaczność.

Odpowiedź: $9,\ 12,\ 15$

$a + b = 21$ i $a^2 + b^2 = 225$, zatem $ab = 108$. Boki są pierwiastkami $t^2 - 21t + 108 = 0$, czyli $(t-9)(t-12) = 0$. Zamiana kolejności przyprostokątnych nie daje nowego trójkąta.

2 / Małe kroki

1. Przyprostokątne mają długości 9 i 12. Oblicz przeciwprostokątną.

Odpowiedź: 15

Pitagoras: $c^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, więc $c = 15$.

2. Naprzeciw kąta α leży bok 9, a przeciwprostokątna ma długość 15. Oblicz $\sin\alpha$.

Odpowiedź: $\frac{3}{5}$

Z definicji $\sin\alpha = 9/15 = 3/5$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz przeciwprostokątną dla boków 9, 12.

Odpowiedź: 15

$\sqrt{81+144} = 15$.

2. Kąt ostry ma sinus $3/5$. Oblicz cosinus.

Odpowiedź: $\frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - 9/25} = 4/5$.

3. Oblicz pole prostokątnego trójkąta o przyprostokątnych 3, 6.

Odpowiedź: 9

$P = 3 \cdot 6/2 = 9.$

4. Przeciwległa przyprostokątna: 4, przyległa: 3. Podaj tangens.

Odpowiedź: $\frac{4}{3}$

Tangens jest ilorazem przyprostokątnej przeciwległej i przyległej, czyli $4/3$.

Grupa B

1. Oblicz przeciwprostokątną dla boków 12, 16.

Odpowiedź: 20

$\sqrt{144 + 256} = 20.$

2. Kąt ostry ma sinus $3/5$. Oblicz cosinus.

Odpowiedź: $\frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - 9/25} = 4/5.$

3. Oblicz pole prostokątnego trójkąta o przyprostokątnych 4, 8.

Odpowiedź: 16

$P = 4 \cdot 8/2 = 16.$

4. Przeciwległa przyprostokątna: 4, przyległa: 3. Podaj tangens.

Odpowiedź: $\frac{4}{3}$

Tangens jest ilorazem przyprostokątnej przeciwległej i przyległej, czyli $4/3$.

Grupa C

1. Oblicz przeciwprostokątną dla boków 15, 20.

Odpowiedź: 25

$\sqrt{225 + 400} = 25.$

2. Kąt ostry ma sinus $3/5$. Oblicz cosinus.

Odpowiedź: $\frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - 9/25} = 4/5.$

3. Oblicz pole prostokątnego trójkąta o przyprostokątnych 5, 10.

Odpowiedź: 25

$P = 5 \cdot 10/2 = 25.$

4. Przeciwległa przyprostokątna: 4, przyległa: 3. Podaj tangens.

Odpowiedź: $\frac{4}{3}$

Tangens jest ilorazem przyprostokątnej przeciwległej i przyległej, czyli $4/3$.

Grupa D

1. Oblicz przeciwprostokątną dla boków 18, 24.

Odpowiedź: 30

$\sqrt{324 + 576} = 30.$

2. Kąt ostry ma sinus $3/5$. Oblicz cosinus.

Odpowiedź: $\frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - 9/25} = 4/5.$

3. Oblicz pole prostokątnego trójkąta o przyprostokątnych 6, 12.

Odpowiedź: 36

$P = 6 \cdot 12/2 = 36.$

4. Przeciwległa przyprostokątna: 4, przyległa: 3. Podaj tangens.

Odpowiedź: $\frac{4}{3}$

Tangens jest ilorazem przyprostokątnej przeciwległej i przyległej, czyli $4/3$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Przyprostokątne mają długości 9 i 12.

Odpowiedź: 15

Dodaje się kwadraty boków: $c = \sqrt{81 + 144} = 15$.

2. Kąt ostry ma sinus $3/5$.

Odpowiedź: $\frac{4}{5}$

Jedynka trygonometryczna dotyczy kwadratów: $\cos^2\alpha = 1 - 9/25 = 16/25$.

3. Przyprostokątne: 9, 12.

Odpowiedź: 54

Pole trójkąta to połowa iloczynu prostopadłych boków.

Grupa B

1. Przyprostokątne mają długości 12 i 16.

Odpowiedź: 20

Dodaje się kwadraty boków: $c = \sqrt{144 + 256} = 20$.

2. Kąt ostry ma sinus $3/5$.

Odpowiedź: $\frac{4}{5}$

Jedynka trygonometryczna dotyczy kwadratów: $\cos^2\alpha = 1 - 9/25 = 16/25$.

3. Przyprostokątne: 12, 16.

Odpowiedź: 96

Pole trójkąta to połowa iloczynu prostopadłych boków.

5 / Matematyka w świecie

1. Drabina długości 15 m stoi podstawą 9 m od pionowej ściany. Na jaką wysokość sięga?

Odpowiedź: 12 m

Ściana i podłoże tworzą kąt prosty. $h = \sqrt{225 - 81} = 12$ m.

2. Wspornik jest przekątną prostokątnej ramy o bokach 9 i 12 dm. Jaka jest łączna długość dwóch takich wsporników?

Odpowiedź: 30 dm

Jeden ma długość 15 dm z Pitagorasa; dwa mają 30 dm.

3. W modelu doświadczenia ruch poziomy ma długość 9 cm, a prostopadły pionowy 12 cm. Oblicz odległość końca toru od początku.

Odpowiedź: 15 cm

Prostopadłe przemieszczenia tworzą przyprostokątne. Wypadkowa odległość to $\sqrt{81 + 144} = 15$ cm.

4. Rama ma przekątną 15 dm i bok 9 dm. Odtwórz drugi bok oraz pole ramy.

Odpowiedź: 12 dm; 108 dm^2

Drugi bok: $\sqrt{225 - 81} = 12$. Pole: $9 \cdot 12 = 108$.