Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Trójkąt równoboczny i okrąg

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Dla trójkąta równobocznego $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, więc $a = R\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 27$.

Odpowiedź: 27

1 / Od schematu do wyzwania

1. Sześciokąt foremny wpisano w koło promienia 3. Oblicz pole sześciokąta.

Odpowiedź: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Sześć równobocznych trójkątów o boku k daje $6k^2\sqrt{3}/4 = 3k^2\sqrt{3}/2$.

2. Trójkąt równoboczny wpisano w okrąg promienia $3\sqrt{3}$. Oblicz bok i pole.

Odpowiedź: 9; $\frac{81\sqrt{3}}{4}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. $a = R\sqrt{3} = 3k$. Następnie $P = a^2\sqrt{3}/4 = 9k^2\sqrt{3}/4$.

3. Koło promienia 3 zawiera wpisany sześciokąt foremny. Oblicz pole części koła poza sześciokątem.

Odpowiedź: $9\pi - \frac{27\sqrt{3}}{2}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Od pola koła πk² odejmujemy pole sześciokąta 3 k²√3/2.

4. Obwód sześciokąta foremnego wpisanego w koło wynosi 36. Oblicz pole koła i jego stosunek do pola sześciokąta.

Odpowiedź: 36π; $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Bok i promień mają długość 2 k. Pole koła to 4πk², a sześciokąta 6 k²√3. Dzielimy pola i skracamy k².

5. Wykaż, że w trójkącie równobocznym promień okręgu opisanego jest dwukrotnie większy od promienia wpisanego.

Odpowiedź: $R = 2r$

Symetria trójkąta sprawia, że oba środki pokrywają się ze środkiem ciężkości. Środek ciężkości dzieli wysokość w stosunku 2:1. Odległość od wierzchołka to R=2 h/3, a od boku r=h/3.

6. P leży wewnątrz trójkąta równobocznego o wysokości h. Wykaż, że suma odległości P od trzech boków wynosi h.

Odpowiedź: h

Połącz P z wierzchołkami. Powstałe trzy trójkąty mają podstawy długości a i wysokości d_1,d_2,d_3. Suma ich pól to $a(d_1 + d_2 + d_3)/2$ i jest równa polu całego trójkąta $ah/2$. Dzielimy przez dodatnie a/2 i dostajemy tezę.

2 / Małe kroki

1. Sześciokąt foremny wpisano w koło promienia 3. Podaj bok sześciokąta.

Odpowiedź: 3

Sześć promieni dzieli sześciokąt na trójkąty równoboczne, więc bok jest równy promieniowi.

2. Trójkąt równoboczny ma bok 6. Oblicz pole.

Odpowiedź: $9\sqrt{3}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. $P = a^2\sqrt{3}/4$. Po podstawieniu a=2 k otrzymujemy k²√3.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Promień koła opisanego na sześciokącie foremnym wynosi 3. Podaj jego bok.

Odpowiedź: 3

Bok sześciokąta jest równy promieniowi.

2. Bok trójkąta równobocznego wynosi 6. Oblicz wysokość.

Odpowiedź: $3\sqrt{3}$

Wysokość to $a\sqrt{3}/2$.

3. Bok sześciokąta foremnego wynosi 3. Podaj obwód.

Odpowiedź: 18

Dodajemy długości sześciu równych boków.

4. Promień koła wynosi 3. Oblicz pole.

Odpowiedź: 9π

Stosujemy $P = \pi r^2$.

Grupa B

1. Promień koła opisanego na sześciokącie foremnym wynosi 4. Podaj jego bok.

Odpowiedź: 4

Bok sześciokąta jest równy promieniowi.

2. Bok trójkąta równobocznego wynosi 8. Oblicz wysokość.

Odpowiedź: $4\sqrt{3}$

Wysokość to $a\sqrt{3}/2$.

3. Bok sześciokąta foremnego wynosi 4. Podaj obwód.

Odpowiedź: 24

Dodajemy długości sześciu równych boków.

4. Promień koła wynosi 4. Oblicz pole.

Odpowiedź: 16π

Stosujemy $P = \pi r^2$.

Grupa C

1. Promień koła opisanego na sześciokącie foremnym wynosi 5. Podaj jego bok.

Odpowiedź: 5

Bok sześciokąta jest równy promieniowi.

2. Bok trójkąta równobocznego wynosi 10. Oblicz wysokość.

Odpowiedź: $5\sqrt{3}$

Wysokość to $a\sqrt{3}/2$.

3. Bok sześciokąta foremnego wynosi 5. Podaj obwód.

Odpowiedź: 30

Dodajemy długości sześciu równych boków.

4. Promień koła wynosi 5. Oblicz pole.

Odpowiedź: 25π

Stosujemy $P = \pi r^2$.

Grupa D

1. Promień koła opisanego na sześciokącie foremnym wynosi 6. Podaj jego bok.

Odpowiedź: 6

Bok sześciokąta jest równy promieniowi.

2. Bok trójkąta równobocznego wynosi 12. Oblicz wysokość.

Odpowiedź: $6\sqrt{3}$

Wysokość to $a\sqrt{3}/2$.

3. Bok sześciokąta foremnego wynosi 6. Podaj obwód.

Odpowiedź: 36

Dodajemy długości sześciu równych boków.

4. Promień koła wynosi 6. Oblicz pole.

Odpowiedź: 36π

Stosujemy $P = \pi r^2$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Sześciokąt foremny wpisany ma promień koła 3.

Odpowiedź: 3

Bok sześciokąta jest promieniem, nie średnicą.

2. Trójkąt równoboczny ma bok 6.

Odpowiedź: $9\sqrt{3}$

Wzór zawiera dzielenie kwadratu boku przez 4.

3. Trójkąt równoboczny ma promienie r oraz R.

Odpowiedź: $R = 2r$

Środek leży dwa razy dalej od wierzchołka niż od boku.

Grupa B

1. Sześciokąt foremny wpisany ma promień koła 4.

Odpowiedź: 4

Bok sześciokąta jest promieniem, nie średnicą.

2. Trójkąt równoboczny ma bok 8.

Odpowiedź: $16\sqrt{3}$

Wzór zawiera dzielenie kwadratu boku przez 4.

3. Trójkąt równoboczny ma promienie r oraz R.

Odpowiedź: $R = 2r$

Środek leży dwa razy dalej od wierzchołka niż od boku.

5 / Matematyka w świecie

1. Okrągła rabata promienia 3 m zawiera sześciokątny foremny chodnik wpisany w jej brzeg. Oblicz obwód chodnika.

Odpowiedź: 18 m

Każdy z sześciu boków ma długość równą promieniowi.

2. Z arkusza wycina się trójkąt równoboczny o boku 6 dm. Ile dm² materiału zajmuje wycięty element?

Odpowiedź: $9\sqrt{3}$ dm^2

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. $P = a^2\sqrt{3}/4 = k^2\sqrt{3}$.

3. W modelu komórki użyto sześciokąta foremnego o boku 3 mm. Oblicz pole modelu.

Odpowiedź: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ mm^2

Model dzielimy na sześć równobocznych trójkątów i sumujemy ich pola.

4. Sześciokątny foremny panel ma obwód 18 dm. Odtwórz promień okręgu opisanego.

Odpowiedź: 3 dm

Bok to obwód podzielony przez sześć. Promień opisany na sześciokącie jest równy bokowi.