# Klucz i wskazówki dla nauczyciela

**Pole i środek okręgu opisanego**

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

## Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Bok AC ma długość 5. Wysokość z B do osi Oy wynosi 2. Pole to $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$. Iloczyn nachyleń AB i BC wynosi -1, więc kąt przy B jest prosty. Środek okręgu opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej AC: $(0, -\frac{1}{2})$.

**Odpowiedź:** B; D

## 1 / Od schematu do wyzwania

**1.** A=(-2,2), B=(4,10) są kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Oblicz jego obwód i pole.

**Odpowiedź:** $40;\ 100$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Różnice współrzędnych to 3 k i 4 k, więc bok ma 5 k. Obwód: 20 k, pole: 25 k².

**2.** A=(0,0), B=(8,0), C=(8,6). Oblicz pole ABC i środek jego przeciwprostokątnej.

**Odpowiedź:** $24;\ (4, 3)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Kąt przy B jest prosty. Pole to 6 k², a przeciwprostokątna AC ma środek otrzymany przez średnie współrzędnych A i C.

**3.** A=(2,2), B=(10,4), D=(4,8) są wierzchołkami równoległoboku ABCD. Wyznacz C i punkt przecięcia przekątnych.

**Odpowiedź:** $C = (12, 10);\ S = (7, 6)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. $C = B + D - A$ daje (6 k,5 k). Punkt S jest środkiem AC, więc S=(7 k/2,3 k).

**4.** Przekątna kwadratu ma końce A=(0,0), C=(12,16). Wyznacz dwa pozostałe wierzchołki.

**Odpowiedź:** $(-2, 14),\ (14, 2)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Środek S=(3 k,4 k). Połowa przekątnej to wektor (3 k,4 k). Obracamy go o 90 stopni: (-4 k,3 k). Wierzchołki S±ten wektor to (-k,7 k) i (7 k,k).

**5.** Wykaż, że środkowe dowolnego trójkąta o wierzchołkach A,B,C przecinają się w punkcie $G = (A + B + C)/3$ (współrzędne liczymy osobno).

**Odpowiedź:** $G = (A + B + C)/3$

Środek BC to D=(B+C)/2. Punkt A+2/3(D-A)=(A+B+C)/3 leży na środkowej AD. Identyczny rachunek dla środkowej z B daje ten sam punkt, więc G jest ich przecięciem.

**6.** Kwadrat ma przekątną o końcach (0,0) i (u,v), gdzie u,v są całkowite i nie są oba zerem. Wyznacz warunek konieczny i wystarczający, aby pozostałe wierzchołki miały całkowite współrzędne.

**Odpowiedź:** u i v mają tę samą parzystość.

Pozostałe wierzchołki to $((u-v)/2, (v+u)/2)$ i $((u+v)/2, (v-u)/2)$: otrzymujemy je przez obrót połowy przekątnej o 90 stopni wokół jej środka. Obie współrzędne są całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy u+v i u-v są parzyste, czyli u,v mają tę samą parzystość.

## 2 / Małe kroki

**1.** A=(0,0), B=(6,8). Oblicz AB.

**Odpowiedź:** $10$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Odległość to $\sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 5k$.

**2.** A=(0,0), B=(8,0), C=(0,6). Oblicz pole ABC.

**Odpowiedź:** $24$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Odcinki AB i AC są prostopadłe, zatem $P = AB \cdot AC/2 = 6k^2$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

## 3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

**Grupa A**

**1.** Oblicz odległość (0,0) od (6,8).

**Odpowiedź:** $10$

Stosujemy wzór na odległość punktów.

**2.** Znajdź środek odcinka (0,0),(4,8).

**Odpowiedź:** $(2, 4)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

**3.** Kwadrat ma bok 2. Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $4$

Pole to kwadrat długości boku.

**4.** Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(4,0),(0,2). Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $4$

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje $t^2$.

**Grupa B**

**1.** Oblicz odległość (0,0) od (9,12).

**Odpowiedź:** $15$

Stosujemy wzór na odległość punktów.

**2.** Znajdź środek odcinka (0,0),(6,12).

**Odpowiedź:** $(3, 6)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

**3.** Kwadrat ma bok 3. Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $9$

Pole to kwadrat długości boku.

**4.** Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(6,0),(0,3). Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $9$

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje $t^2$.

**Grupa C**

**1.** Oblicz odległość (0,0) od (12,16).

**Odpowiedź:** $20$

Stosujemy wzór na odległość punktów.

**2.** Znajdź środek odcinka (0,0),(8,16).

**Odpowiedź:** $(4, 8)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

**3.** Kwadrat ma bok 4. Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $16$

Pole to kwadrat długości boku.

**4.** Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(8,0),(0,4). Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $16$

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje $t^2$.

**Grupa D**

**1.** Oblicz odległość (0,0) od (15,20).

**Odpowiedź:** $25$

Stosujemy wzór na odległość punktów.

**2.** Znajdź środek odcinka (0,0),(10,20).

**Odpowiedź:** $(5, 10)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

**3.** Kwadrat ma bok 5. Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $25$

Pole to kwadrat długości boku.

**4.** Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(10,0),(0,5). Oblicz pole.

**Odpowiedź:** $25$

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje $t^2$.

## 4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

**Grupa A**

**1.** A=(0,0), B=(6,8).

**Odpowiedź:** $10$

Odległość to pierwiastek z sumy kwadratów różnic, a nie suma różnic.

**2.** Końce odcinka: (0,0),(4,8).

**Odpowiedź:** $(2, 4)$

Sumę każdej pary współrzędnych trzeba podzielić przez 2.

**3.** Przekątna kwadratu ma długość 4.

**Odpowiedź:** $8$

Pole kwadratu jest połową kwadratu jego przekątnej.

**Grupa B**

**1.** A=(0,0), B=(9,12).

**Odpowiedź:** $15$

Odległość to pierwiastek z sumy kwadratów różnic, a nie suma różnic.

**2.** Końce odcinka: (0,0),(6,12).

**Odpowiedź:** $(3, 6)$

Sumę każdej pary współrzędnych trzeba podzielić przez 2.

**3.** Przekątna kwadratu ma długość 6.

**Odpowiedź:** $18$

Pole kwadratu jest połową kwadratu jego przekątnej.

## 5 / Matematyka w świecie

**1.** Na planie punkt startu to (0,0), a cel (6,8); jednostka to 1 m. Oblicz długość najkrótszego odcinka łączącego punkty.

**Odpowiedź:** $10$ m

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Odległość euklidesowa wynosi 5 k.

**2.** Kwadratowy panel ma kolejne narożniki (0,0) i (6,8) w dm. Oblicz ilość materiału potrzebnego do pokrycia panelu.

**Odpowiedź:** $100$ $\mathrm{dm}^2$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Długość boku wynosi 5 k, więc pole 25 $k^2$.

**3.** W modelu ruchu punkt przeszedł z (0,0) do (12,16) mm. Znajdź środek odcinka łączącego pozycje.

**Odpowiedź:** $(6, 8)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Średnie współrzędnych wynoszą 3 k i 4 k.

**4.** Trójkątny teren ma wierzchołki (0,0),(a,0),(0,6) w metrach. Jego pole wynosi 24 $m^2$. Odtwórz dodatnie a.

**Odpowiedź:** $a = 8$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. $a \cdot 6/2 = 24$. Rozwiązanie równania daje a=4 k.