Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Równanie okręgu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Kwadrat odległości SA to $(3)^2+(-4)^2=25=r^2$, więc punkt leży na okręgu. Prawa strona równania powinna wynosić $r^2=25$. Odpowiedź: PF.

Odpowiedź: PF

1 / Od schematu do wyzwania

1. Odcinek A=(-6,-3), B=(12,21) jest średnicą. Wyznacz równanie okręgu.

Odpowiedź: $(x-3)^2+(y-9)^2=225$

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Środek to (k,3 k). Różnice końców wynoszą 6 k i 8 k, więc średnica ma 10 k, a promień 5 k.

2. Okrąg ma równanie $(x-3)^2+(y+3)^2=225$. Sprawdź, czy P=(12,-15) leży na okręgu.

Odpowiedź: Tak.

Kwadrat odległości od środka to $(9)^2+(-12)^2=225$, czyli r².

3. Okrąg $(x-3)^2+(y+3)^2=225$ odbito względem osi Oy. Zapisz równanie obrazu.

Odpowiedź: $(x+3)^2+(y+3)^2=225$

Odbicie zmienia znak pierwszej współrzędnej środka; promień pozostaje ten sam.

4. Okrąg ma środek (3,-3) i jest styczny do osi Ox. Wyznacz jego równanie i punkty przecięcia osi Oy.

Odpowiedź: $(x-3)^2+(y+3)^2=9;\ (0,-3)$

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Promień jest odległością środka od Ox, czyli k. Dla x=0 równanie daje (y+k)²=0; jedyny punkt to (0,-k).

5. Wykaż, że środki wszystkich okręgów przechodzących przez różne punkty A i B leżą na symetralnej AB.

Odpowiedź: Są jednakowo odległe od A i B.

Jeżeli S jest środkiem takiego okręgu, SA i SB są promieniami, zatem SA=SB. Zbiór punktów równoodległych od końców odcinka to jego symetralna.

6. A=(-3,0), B=(3,0). Wyznacz zbiór wszystkich punktów P spełniających $PA^2+PB^2=36$ i uzasadnij jego kształt.

Odpowiedź: $x^2+y^2=9$

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Dla P=(x,y) suma kwadratów wynosi $(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=2x^2+2y^2+18$. Równość z 36 jest równoważna $x^2+y^2=9$. To okrąg o środku (0,0) i promieniu k.

2 / Małe kroki

1. Okrąg ma środek (3,-3) i promień 15. Zapisz równanie.

Odpowiedź: $(x-3)^2+(y+3)^2=225$

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Stosujemy $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ z a=k,b=-k,r=5 k.

2. Odcinek A=(-6,-3), B=(12,21) jest średnicą. Wyznacz środek okręgu.

Odpowiedź: $(3,9)$

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Środek średnicy ma współrzędne będące średnimi końców: (k,3 k).

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Okrąg: $(x-3)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(3,-2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=9$. Podaj promień.

Odpowiedź: 3

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 6. Podaj promień.

Odpowiedź: 3

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (3,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-3, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa B

1. Okrąg: $(x-4)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(4, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=16$. Podaj promień.

Odpowiedź: 4

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 8. Podaj promień.

Odpowiedź: 4

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (4,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-4, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa C

1. Okrąg: $(x-5)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(5, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=25$. Podaj promień.

Odpowiedź: 5

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 10. Podaj promień.

Odpowiedź: 5

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (5,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-5, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa D

1. Okrąg: $(x-6)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(6, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=36$. Podaj promień.

Odpowiedź: 6

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 12. Podaj promień.

Odpowiedź: 6

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (6,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-6, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. S=(2,-3), promień 3.

Odpowiedź: $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

2. S=(0,0), promień 3.

Odpowiedź: $x^2+y^2=9$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

3. S=(2,-3), odbicie względem Oy.

Odpowiedź: $(-2,-3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

Grupa B

1. S=(2,-3), promień 4.

Odpowiedź: $(x-2)^2+(y+3)^2=16$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

2. S=(0,0), promień 4.

Odpowiedź: $x^2+y^2=16$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

3. S=(2,-3), odbicie względem Oy.

Odpowiedź: $(-2,-3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

5 / Matematyka w świecie

1. Okrągła rabata ma środek (3,-3) i promień 15 m na planie. Zapisz równanie jej brzegu.

Odpowiedź: $(x-3)^2+(y+3)^2=225$

Podstawiamy środek i kwadrat promienia do standardowego równania.

2. Końcami średnicy okrągłej tablicy są (-6,-3) i (12,21) dm. Oblicz pole powierzchni do pokrycia folią.

Odpowiedź: 225π dm^2

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Średnica ma długość 10 k, promień 5 k, a pole 25πk².

3. Tor w płaskim modelu ma równanie $(x-3)^2+(y+3)^2=225$ w cm. Czy punkt (12,-15) leży na torze?

Odpowiedź: Tak.

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Po podstawieniu kwadrat odległości od środka jest równy 25 k², tak jak prawa strona równania.

4. Brzeg okrągłego obszaru opisuje równanie $(x-3)^2+(y+3)^2=225$. Odtwórz środek i średnicę.

Odpowiedź: $S=(3,-3);\ d=30$

Środek odczytujemy z nawiasów. Promień jest pierwiastkiem prawej strony, a średnica jest dwa razy większa.