Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Znaki sumy i iloczynu rozwiązań

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Dzielimy równania przez współczynniki: $x+y=\frac{1}{20}$ i $x-y=\frac{1}{26}$. Dodanie równań daje $x=\frac{23}{520}$, a odjęcie $y=\frac{3}{520}$. Suma jest dodatnia. Iloczyn jest dodatni, bo oba czynniki są dodatnie. Odpowiedź: PP.

Odpowiedź: PP

1 / Od schematu do wyzwania

1. $x+y=1/2$, $x-y=1/3$. Wyznacz znaki sumy i iloczynu xy.

Odpowiedź: $x+y>0,\ xy>0$

$x=\frac{5}{12}$ i $y=\frac{1}{12}$ są dodatnie. Suma i iloczyn są więc dodatnie.

2. $x+y=1/2$, $x-y=1/1$. Wyznacz znaki x i y.

Odpowiedź: $x>0,\ y<0$

Po dodaniu i odjęciu równań $x=\frac{3}{4}$, $y=-\frac{1}{4}$. Pierwsza liczba jest dodatnia, druga ujemna.

3. Rozwiąż $x+y=0$, $x-y=4$ i oblicz xy.

Odpowiedź: $x=2,\ y=-2;\ xy=-4$

Dodanie daje $2x=4$, więc x=2 i y=-2. Iloczyn wynosi -4.

4. Zbadaj liczbę rozwiązań układu $x+y=2$, $x+my=2$ w zależności od m.

Odpowiedź: $m=1:\ \infty;\quad m\neq 1:\ (2,0)$

Odejmujemy równania: $(m-1)y=0$. Dla m≠1 musi być y=0 i x=2. Dla m=1 oba równania są jednakowe, więc każda para z prostej $x+y=2$ jest rozwiązaniem.

5. Układ ma postać $x+y=t$, $x-y=2$. Dla jakich t iloczyn xy jest dodatni?

Odpowiedź: $t<-2$ lub $t>2$

$x=(t+2)/2$, $y=(t-2)/2$. Iloczyn to $(t^2-4)/4$. Jest dodatni wtedy, gdy $|t|>2$.

6. Znajdź wszystkie nieujemne całkowite pary (x,y) spełniające $2x+3y=13$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(5,1),(2,3)\}$

Prawa strona jest nieparzysta, więc y musi być nieparzyste. Piszemy $y=2k+1$ z całkowitym k≥0. Wtedy $x=5-3k$. Warunek x≥0 daje $0\le k\le 1$. Te wartości k dają dokładnie wszystkie pary z odpowiedzi.

2 / Małe kroki

1. Rozwiąż $x+y=4$, $x-y=2$.

Odpowiedź: $x=3,\ y=1$

Po dodaniu $2x=6$, więc $x=3$ i $y=1$.

2. Rozwiąż $x+y=5$, $x=2$.

Odpowiedź: $x=2,\ y=3$

Podstawiamy znane x do sumy; $y=3$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $x+y=4$ i $x=3$. Oblicz y.

Odpowiedź: 1

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x+y=4$, $x-y=2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 3

Dodanie daje $2x=6$.

3. Jeśli $x=2$, $y=-1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 4$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 2

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

Grupa B

1. $x + y = 6$ i $x = 4$. Oblicz y.

Odpowiedź: 2

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x + y = 6$, $x - y = 2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 4

Dodanie daje $2x = 8$.

3. Jeśli $x = 3$, $y = -1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 6$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 3

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

Grupa C

1. $x + y = 8$ i $x = 5$. Oblicz y.

Odpowiedź: 3

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x + y = 8$, $x - y = 2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 5

Dodanie daje $2x = 10$.

3. Jeśli $x = 4$, $y = -1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 8$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 4

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

Grupa D

1. $x + y = 10$ i $x = 6$. Oblicz y.

Odpowiedź: 4

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x + y = 10$, $x - y = 2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 6

Dodanie daje $2x = 12$.

3. Jeśli $x = 5$, $y = -1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 10$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 5

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Dodawano $x + y = 4$ i $x - y = 2$.

Odpowiedź: $2x = 6$

Przy dodawaniu równań dodajemy także ich prawe strony.

2. Z $x + y = 4$ wyznaczano y.

Odpowiedź: $y = 4 - x$

Odejmujemy x od obu stron; znaki składników nie mogą zostać zamienione.

3. $x = 2$, $y = -2$. Określano znak iloczynu.

Odpowiedź: $xy = -4 < 0$

Czynniki mają przeciwne znaki, więc iloczyn jest ujemny.

Grupa B

1. Dodawano $x + y = 6$ i $x - y = 2$.

Odpowiedź: $2x = 8$

Przy dodawaniu równań dodajemy także ich prawe strony.

2. Z $x + y = 6$ wyznaczano y.

Odpowiedź: $y = 6 - x$

Odejmujemy x od obu stron; znaki składników nie mogą zostać zamienione.

3. $x = 3$, $y = -3$. Określano znak iloczynu.

Odpowiedź: $xy = -9 < 0$

Czynniki mają przeciwne znaki, więc iloczyn jest ujemny.

5 / Matematyka w świecie

1. W magazynie jest 4 pudełek dwóch typów. Pierwszych jest o 2 więcej. Ile pudełek jest każdego typu?

Odpowiedź: $3,\ 1$

Układ $x + y = 4$, $x - y = 2$ daje odpowiedź.

2. Dwa zeszyty i długopis kosztują 7 zł, a zeszyt i dwa długopisy 8 zł. Oblicz ceny obu produktów.

Odpowiedź: 2 zł; 3 zł

Układ $2x + y = 7$, $x + 2y = 8$. Po eliminacji otrzymujemy $x = 2$ i $y = 3$.

3. Dwie serie pomiarowe zawierają łącznie 4 próbek. W pierwszej są o 2 próbki więcej. Wyznacz liczebności obu serii.

Odpowiedź: $3,\ 1$

Suma i różnica dają układ liniowy. Po dodaniu równań pierwsza liczebność wynosi 3, druga 1.

4. Zadanie odwrócone: $2x + y = 7$, a y jest o 1 większe od x. Jaki będzie koszt $x + 2y$?

Odpowiedź: 8

Podstawiamy $y = x + 1$: $3x + 1 = 7$, więc $x = 2$, $y = 3$. Poszukiwany koszt to 8.