Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Odwrotna proporcjonalność

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Przy odwrotnej proporcjonalności iloczyn odpowiadających wielkości jest stały. Dlatego $18 \cdot 9 = 24a$. Po podzieleniu przez 24 otrzymujemy $a = \frac{27}{4}$. Odpowiedź: B.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Wielkości x,y są odwrotnie proporcjonalne. Dla $x = 2$ jest $y = 4$. Oblicz y dla $x = 4$.

Odpowiedź: 2

Stały iloczyn to 8. Dzielimy go przez 4, otrzymując 2.

2. Dodatnie wielkości są odwrotnie proporcjonalne. Ile razy zmieni się y, jeśli x wzrośnie trzykrotnie?

Odpowiedź: $y_{\text{nowy}} = y_{\text{stary}}/3$

Ponieważ iloczyn xy ma być stały, potrojenie jednego czynnika wymaga podzielenia drugiego przez 3.

3. Znajdź dodatnie x,y, jeżeli $xy = 8$ oraz $x = 2y$.

Odpowiedź: $x = 4,\ y = 2$

Podstawiamy $x = 2y$: $2y^2 = 8$. Dodatniość daje $y = 2$ i $x = 4$.

4. Dodatnie x,y spełniają $xy = 4$. Wykaż, że $x + y \geq 4$. Podaj warunek równości.

Odpowiedź: $x = y = 2$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ daje $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 4$. Równość wymaga x=y, co łącznie z iloczynem daje $x = y = 2$.

5. Wyznacz wszystkie dodatnie całkowite pary $x \leq y$ spełniające $xy = 6$.

Odpowiedź: $\{(1, 6), (2, 3)\}$

Mniejszy czynnik x nie przekracza $\sqrt{6}$ i musi dzielić 6. Dla każdego takiego dzielnika bierzemy $y = 6/x$. W ten sposób otrzymujemy wszystkie pary z odpowiedzi.

6. Wyznacz wszystkie dodatnie całkowite n, dla których $\frac{6n+1}{n+1}$ jest całkowite. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{4\}$

Zapisujemy ułamek jako $6 - \frac{5}{n+1}$. Jest całkowity wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1$ jest dzielnikiem liczby 5. Ponieważ n>0, wybieramy wszystkie dzielniki od 2 do 5 i od każdego odejmujemy 1. Nie ma innych możliwości.

2 / Małe kroki

1. $xy = 6$ i $x = 2$. Oblicz y.

Odpowiedź: 3

$y = 6/2 = 3$.

2. $y = 6/x$. Oblicz y dla $x = 3$.

Odpowiedź: 2

$y = 6/3 = 2$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $xy = 6$, $x = 2$. Oblicz y.

Odpowiedź: 3

$y = 6/2 = 3$.

2. $xy = 6$, $y = 3$. Oblicz x.

Odpowiedź: 2

$x = 6/3 = 2$.

3. W odwrotnej proporcjonalności x podwojono. Co dzieje się z y?

Odpowiedź: y maleje dwukrotnie

Iloczyn musi pozostać stały.

4. Czy punkty $(2, 2)$ i $(4, 1)$ mają ten sam iloczyn współrzędnych?

Odpowiedź: tak

Oba iloczyny wynoszą 4.

Grupa B

1. $xy = 12$, $x = 3$. Oblicz y.

Odpowiedź: 4

$y = 12/3 = 4$.

2. $xy = 12$, $y = 4$. Oblicz x.

Odpowiedź: 3

$x = 12/4 = 3$.

3. W odwrotnej proporcjonalności x podwojono. Co dzieje się z y?

Odpowiedź: y maleje dwukrotnie

Iloczyn musi pozostać stały.

4. Czy punkty $(3, 2)$ i $(6, 1)$ mają ten sam iloczyn współrzędnych?

Odpowiedź: tak

Oba iloczyny wynoszą 6.

Grupa C

1. $xy = 20$, $x = 4$. Oblicz y.

Odpowiedź: 5

$y = 20/4 = 5$.

2. $xy = 20$, $y = 5$. Oblicz x.

Odpowiedź: 4

$x = 20/5 = 4$.

3. W odwrotnej proporcjonalności x podwojono. Co dzieje się z y?

Odpowiedź: y maleje dwukrotnie

Iloczyn musi pozostać stały.

4. Czy punkty $(4, 2)$ i $(8, 1)$ mają ten sam iloczyn współrzędnych?

Odpowiedź: tak

Oba iloczyny wynoszą 8.

Grupa D

1. $xy = 30$, $x = 5$. Oblicz y.

Odpowiedź: 6

$y = 30/5 = 6$.

2. $xy = 30$, $y = 6$. Oblicz x.

Odpowiedź: 5

$x = 30/6 = 5$.

3. W odwrotnej proporcjonalności x podwojono. Co dzieje się z y?

Odpowiedź: y maleje dwukrotnie

Iloczyn musi pozostać stały.

4. Czy punkty $(5, 2)$ i $(10, 1)$ mają ten sam iloczyn współrzędnych?

Odpowiedź: tak

Oba iloczyny wynoszą 10.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Przy $xy = 6$ podwojono x.

Odpowiedź: y trzeba podzielić przez 2.

Podwojenie obu wielkości zwiększyłoby iloczyn czterokrotnie.

2. Z $xy = 6$ i $x = 2$ obliczano y.

Odpowiedź: 3

W odwrotnej proporcjonalności dzielimy stały iloczyn przez znaną wielkość, nie dodajemy.

3. Rozpoznawano odwrotną proporcjonalność.

Odpowiedź: Iloczyn xy jest stały.

Stałość różnicy opisuje inną zależność; przy odwrotnej proporcjonalności stały jest iloczyn.

Grupa B

1. Przy $xy = 12$ podwojono x.

Odpowiedź: y trzeba podzielić przez 2.

Podwojenie obu wielkości zwiększyłoby iloczyn czterokrotnie.

2. Z $xy = 12$ i $x = 3$ obliczano y.

Odpowiedź: 4

W odwrotnej proporcjonalności dzielimy stały iloczyn przez znaną wielkość, nie dodajemy.

3. Rozpoznawano odwrotną proporcjonalność.

Odpowiedź: Iloczyn xy jest stały.

Stałość różnicy opisuje inną zależność; przy odwrotnej proporcjonalności stały jest iloczyn.

5 / Matematyka w świecie

1. Tę samą trasę długości 6 km pokonuje się ze stałą prędkością 2 km/h. Oblicz czas i czas po podwojeniu prędkości.

Odpowiedź: $3;\ \frac{3}{2}$

Czas jest ilorazem stałej drogi i prędkości. Podwojenie prędkości zmniejsza go dwukrotnie.

2. Budżet na identyczne paczki wynosi 6 zł. Ile paczek kupimy po 2 zł, a ile po 3 zł?

Odpowiedź: $3;\ 2$

Liczby paczek wynoszą $6/2 = 3$ oraz $6/3 = 2$.

3. W modelu gazu w stałej temperaturze $pV = 6$. Oblicz V dla $p = 2$ i dla $p = 4$.

Odpowiedź: $3;\ \frac{3}{2}$

Objętość jest ilorazem stałej wartości pV i ciśnienia p. Jednostki są umowne.

4. Zadanie odwrócone: $y = k/x$ i punkt $(2, 3)$ należy do tej zależności. Wyznacz k i wzór.

Odpowiedź: $k = 6;\ y = 6/x$

Mnożymy współrzędne: $k = 2(3) = 6$.