Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Ekstrema paraboli na przedziale

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Parabola ma ramiona skierowane w dół, a jej wierzchołek ma pierwszą współrzędną π. Należy ona do przedziału $[0, 6]$, więc tam występuje maksimum. Wartości maleją wraz z odległością argumentu od π. Porównujemy odległości końców: π oraz $6 - \pi$. Ponieważ π to około 3,142, dalej od wierzchołka leży 0. Tam występuje minimum. Odpowiedzi: C; A.

Odpowiedź: C; A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Dla $f(x) = 2(x-2)^2 - 8$ podaj wierzchołek, zera i zbiór wartości.

Odpowiedź: $W = (2, -8),\ x = 0, 4;\ [-8, \infty)$

Kwadrat zeruje się dla x=2; $2(x-2)^2 = 8$ daje odległość 2 od wierzchołka. Minimum to -8.

2. Zapisz $f(x) = x^2 - 4x + 7$ w postaci kanonicznej i podaj minimum.

Odpowiedź: $f(x) = (x-2)^2 + 3;\ \min f = 3$

Dopełniamy kwadrat: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

3. Funkcja ma wierzchołek $(2, -2)$ i przechodzi przez $(3, 1)$. Wyznacz jej wzór.

Odpowiedź: $f(x) = 3(x-2)^2 - 2$

Podstawienie do $a(x-2)^2 - 2$ daje $1 = a - 2$, stąd a=3.

4. Dla $f(x) = (x-2)^2$ znajdź najmniejszą wartość $f(x) + f(x+2)$.

Odpowiedź: 2

Po oznaczeniu $u = x - 2 + 1$ mamy $(u-1)^2 + (u+1)^2 = 2u^2 + 2$. Minimum 2 dla u=0.

5. Wykaż, że dla każdego rzeczywistego x zachodzi $(x-2)^2 + (x-4)^2 \geq 2$. Ustal warunek równości.

Odpowiedź: $x = 3$

Lewa strona wynosi $2(x-3)^2 + 2$. Kwadrat jest nieujemny; równość zachodzi dokładnie w podanym punkcie.

6. Dla jakich rzeczywistych m równanie $(|x| - 2)^2 - 4 = m$ ma dokładnie trzy różne rozwiązania?

Odpowiedź: $m = 0$

Niech $u = |x| \geq 0$. Wówczas $u = 2 \pm \sqrt{m+4}$. Trzy x powstają dokładnie wtedy, gdy jedna wartość u wynosi 0, a druga jest dodatnia. To wymaga $\sqrt{m+4} = 2$. Dla innych m liczba rozwiązań wynosi 0,2 lub 4.

2 / Małe kroki

1. Odczytaj wierzchołek $(x-2)^2 + 1$.

Odpowiedź: $(2, 1)$

Porównujemy z postacią a(x-p)²+q.

2. Podaj najmniejszą wartość $2(x-2)^2 - 3$.

Odpowiedź: -3

Kwadrat przyjmuje najmniejszą wartość 0.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-2)^2 + 2$.

Odpowiedź: $(2, 2)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 2$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-2)^2 + 2$.

Odpowiedź: 2

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 2$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

Grupa B

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-3)^2 + 3$.

Odpowiedź: $(3, 3)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-3)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 3$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-3)^2 + 3$.

Odpowiedź: 3

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 3$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

Grupa C

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-4)^2 + 4$.

Odpowiedź: $(4, 4)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-4)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 4$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-4)^2 + 4$.

Odpowiedź: 4

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 4$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

Grupa D

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-5)^2 + 5$.

Odpowiedź: $(5, 5)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-5)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 5$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-5)^2 + 5$.

Odpowiedź: 5

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 5$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $f(x) = (x-2)^2 + 2$. Uczeń podaje wierzchołek.

Odpowiedź: $(2, 2)$

W nawiasie mamy x-p, więc argument wierzchołka to p.

2. $f(x) = -(x-2)^2 + 2$.

Odpowiedź: Największa wartość to 2.

Ujemny kwadrat nie przekracza zera; funkcja ma maksimum, a nie minimum.

3. $f(x) = (x-2)^2$. Uczeń rozwija nawias.

Odpowiedź: $x^2 - 4x + 4$

W kwadracie różnicy pominięto składnik -2 px.

Grupa B

1. $f(x) = (x-3)^2 + 3$. Uczeń podaje wierzchołek.

Odpowiedź: $(3, 3)$

W nawiasie mamy x-p, więc argument wierzchołka to p.

2. $f(x) = -(x-3)^2 + 3$.

Odpowiedź: Największa wartość to 3.

Ujemny kwadrat nie przekracza zera; funkcja ma maksimum, a nie minimum.

3. $f(x) = (x-3)^2$. Uczeń rozwija nawias.

Odpowiedź: $x^2 - 6x + 9$

W kwadracie różnicy pominięto składnik -2 px.

5 / Matematyka w świecie

1. Ogród ma boki x oraz $8 - x$ metrów. Wyznacz x, dla którego pole jest największe.

Odpowiedź: 4

$P = x(8-x) = -(x-4)^2 + 16$. Maksimum dla x=4.

2. Umowny model zysku to $Z(x) = -(x-4)^2 + 16$ zł. Podaj największy zysk i wielkość x.

Odpowiedź: $Z_{max} = 16,\ x = 4$

Odejmowany kwadrat jest najmniejszy i równy 0 w x=4.

3. W doświadczeniu ruch opisuje model $h(t) = t(8-t)$ cm dla $0 \le t \le 8$. Oblicz czas i wysokość maksimum.

Odpowiedź: $t = 4,\ h = 16$

Zera to 0 i 8; ich środek to 4. Po podstawieniu wysokość wynosi 16.

4. Wierzchołek modelu $f(x) = a(x-4)^2$ jest znany, a $f(6) = 12$. Odtwórz a i podaj wzór.

Odpowiedź: $a = 3,\ f(x) = 3(x-4)^2$

Po podstawieniu argumentu odległego o 2 od wierzchołka otrzymujemy $4a = 12$.