Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Pierwiastki nieparzystego stopnia

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych są ujemne. Sprawdzamy przez potęgowanie: $(-3)^3 = -27$ i $(-1)^5 = -1$. Zatem $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[5]{-1} = -3 + (-1) = -4$. Odpowiedź: A.

Odpowiedź: A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $\sqrt[3]{-125} + \sqrt[5]{1024}$.

Odpowiedź: -1

Otrzymujemy $-(5) + 4 = -1$.

2. Uprość $\frac{\sqrt[3]{-512}}{\sqrt[3]{8}}$.

Odpowiedź: -4

Łączymy pierwiastki: $\sqrt[3]{-64} = -4$.

3. Rozwiąż równanie $\sqrt[3]{x + 64} = 5$.

Odpowiedź: 61

Potęgujemy obie strony do trzeciej potęgi: $x + 64 = 125$, stąd $x = 61$.

4. Liczby rzeczywiste u, v spełniają $u + v = 6$ i $uv = 1$. Oblicz $u^3 + v^3$.

Odpowiedź: 198

Ze wzoru $u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3uv(u + v)$ otrzymujemy $216 - 3(6) = 198$.

5. Wiadomo, że $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = 6$ i $uv = 8$. Oblicz $u + v$.

Odpowiedź: 180

Oznaczamy pierwiastki przez p i q. Wtedy $pq = 2$. Zatem $u + v = p^3 + q^3 = (6)^3 - 6(6) = 180$.

6. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 3$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $(1, 8), (8, 1)$

Niech $u = \sqrt[3]{m}$, $v = \sqrt[3]{n}$. Po podniesieniu sumy do sześcianu $27 = m + n + 9uv$, więc $k = uv$ jest wymierny. Ponieważ $k^3 = mn$ jest całkowite, wymierność k wymusza jego całkowitość (skrócony mianownik musiałby dzielić licznik). Mamy $1 \le k \le 9/4$, zatem k=1 lub 2. Z $u^2 - 3u + k = 0$ dostajemy $m = u^3 = (9 - k)u - 3k$, więc u jest wymierny, a jako pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej jest całkowity. Podobnie v. Dodatnie całkowite u,v o sumie 3 to 1 i 2, stąd m,n to 1 i 8 w obu kolejnościach.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $\sqrt[3]{-64}$.

Odpowiedź: -4

Ponieważ $(-4)^3 = -64$, pierwiastek wynosi -4.

2. Oblicz $\sqrt[5]{3125} - \sqrt[3]{64}$.

Odpowiedź: 1

Pierwiastki to 5 i 4; ich różnica wynosi 1.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $\sqrt[3]{64}$.

Odpowiedź: 4

$4^3 = 64$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-64}$.

Odpowiedź: -4

$(-4)^3 = -64$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{3125}$.

Odpowiedź: 5

$(5)^5 = 3125$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{512}/2$.

Odpowiedź: 4

Pierwiastek to $2 \cdot 4$; dzielimy przez 2.

Grupa B

1. Oblicz $\sqrt[3]{125}$.

Odpowiedź: 5

$5^3 = 125$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-125}$.

Odpowiedź: -5

$(-5)^3 = -125$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{7776}$.

Odpowiedź: 6

$(6)^5 = 7776$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{1000}/2$.

Odpowiedź: 5

Pierwiastek to $2 \cdot 5$; dzielimy przez 2.

Grupa C

1. Oblicz $\sqrt[3]{216}$.

Odpowiedź: 6

$6^3 = 216$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-216}$.

Odpowiedź: -6

$(-6)^3 = -216$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{16807}$.

Odpowiedź: 7

$(7)^5 = 16807$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{1728}/2$.

Odpowiedź: 6

Pierwiastek to $2 \cdot 6$; dzielimy przez 2.

Grupa D

1. Oblicz $\sqrt[3]{343}$.

Odpowiedź: 7

$7^3 = 343$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-343}$.

Odpowiedź: -7

$(-7)^3 = -343$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{32768}$.

Odpowiedź: 8

$(8)^5 = 32768$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{2744}/2$.

Odpowiedź: 7

Pierwiastek to $2 \cdot 7$; dzielimy przez 2.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Obliczano $\sqrt[3]{-64}$.

Odpowiedź: -4

Pierwiastek nieparzystego stopnia zachowuje znak liczby pod nim.

2. Obliczano $\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{125}$.

Odpowiedź: 9

Pierwiastek nie rozdziela się przez dodawanie. Najpierw obliczamy każdy pierwiastek.

3. Rozwiązywano $\sqrt[3]{x} = 4$.

Odpowiedź: $x = 64$

Funkcja sześcienna jest różnowartościowa; nie dopisujemy drugiego znaku.

Grupa B

1. Obliczano $\sqrt[3]{-125}$.

Odpowiedź: -5

Pierwiastek nieparzystego stopnia zachowuje znak liczby pod nim.

2. Obliczano $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$.

Odpowiedź: 11

Pierwiastek nie rozdziela się przez dodawanie. Najpierw obliczamy każdy pierwiastek.

3. Rozwiązywano $\sqrt[3]{x} = 5$.

Odpowiedź: $x = 125$

Funkcja sześcienna jest różnowartościowa; nie dopisujemy drugiego znaku.

5 / Matematyka w świecie

1. Pudełko ma kształt sześcianu o objętości 64 dm^3. Oblicz krawędź i łączną długość 12 krawędzi.

Odpowiedź: 4 dm; 48 dm

$s = \sqrt[3]{64} = 4$ dm, a $12s = 48$ dm.

2. W umownym modelu kosztu $K = x^3$, gdzie x jest liczbą dodatnią, koszt wzrósł z 64 do 512 jednostek. Ile razy wzrosło x?

Odpowiedź: 2

Początkowo $x = 4$, potem $x = 8$. Iloraz wartości x wynosi 2.

3. Czujnik zapisuje przemieszczenie z jako $z = t^3$. Dla odczytu $z = -64$ wyznacz t i sprawdź znak.

Odpowiedź: -4

$t = \sqrt[3]{-64} = -4$. Ujemne t po potęgowaniu nieparzystym daje ujemny odczyt.

4. Zadanie odwrócone: $\sqrt[3]{N} - 4 = 2$. Odtwórz liczbę N.

Odpowiedź: 216

$\sqrt[3]{N} = 6$, więc $N = 216$.