Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Własności i postacie funkcji kwadratowej

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Współczynnik przy kwadracie jest dodatni, więc minimum funkcji to 4. Minimum jest dodatnie, więc funkcja nie ma rzeczywistych miejsc zerowych. Wierzchołek ma pierwszą współrzędną 2, dlatego oś symetrii ma równanie $x = 2$. W podpunkcie 13.1 otrzymujemy FP. Rozwijamy kwadrat: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Mnożymy przez 2 i dodajemy 4: $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$. W podpunkcie 13.2 poprawna jest odpowiedź D.

Odpowiedź: FP; D

1 / Od schematu do wyzwania

1. Dla $f(x) = 2(x-3)^2 - 8$ podaj wierzchołek, zera i zbiór wartości.

Odpowiedź: $W = (3, -8),\ x = 1, 5;\ [-8, \infty)$

Kwadrat zeruje się dla x=3; $2(x-3)^2 = 8$ daje odległość 2 od wierzchołka. Minimum to -8.

2. Zapisz $f(x) = x^2 - 6x + 12$ w postaci kanonicznej i podaj minimum.

Odpowiedź: $f(x) = (x-3)^2 + 3;\ \min f = 3$

Dopełniamy kwadrat: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

3. Funkcja ma wierzchołek $(3, -2)$ i przechodzi przez $(4, 1)$. Wyznacz jej wzór.

Odpowiedź: $f(x) = 3(x-3)^2 - 2$

Podstawienie do $a(x-3)^2 - 2$ daje $1 = a - 2$, stąd a=3.

4. Dla $f(x) = (x-3)^2$ znajdź najmniejszą wartość $f(x) + f(x+2)$.

Odpowiedź: 2

Po oznaczeniu $u = x - 3 + 1$ mamy $(u-1)^2 + (u+1)^2 = 2u^2 + 2$. Minimum 2 dla u=0.

5. Wykaż, że dla każdego rzeczywistego x zachodzi $(x-3)^2 + (x-5)^2 \geq 2$. Ustal warunek równości.

Odpowiedź: $x = 4$

Lewa strona wynosi $2(x-4)^2 + 2$. Kwadrat jest nieujemny; równość zachodzi dokładnie w podanym punkcie.

6. Dla jakich rzeczywistych m równanie $(|x| - 3)^2 - 4 = m$ ma dokładnie trzy różne rozwiązania?

Odpowiedź: $m = 5$

Niech $u = |x| \geq 0$. Wówczas $u = 3 \pm \sqrt{m+4}$. Trzy x powstają dokładnie wtedy, gdy jedna wartość u wynosi 0, a druga jest dodatnia. To wymaga $\sqrt{m+4} = 3$. Dla innych m liczba rozwiązań wynosi 0,2 lub 4.

2 / Małe kroki

1. Odczytaj wierzchołek $(x-3)^2 + 1$.

Odpowiedź: $(3, 1)$

Porównujemy z postacią a(x-p)²+q.

2. Podaj najmniejszą wartość $2(x-3)^2 - 3$.

Odpowiedź: -3

Kwadrat przyjmuje najmniejszą wartość 0.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-3)^2 + 2$.

Odpowiedź: $(3, 2)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-3)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 3$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-3)^2 + 2$.

Odpowiedź: 2

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 2$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

Grupa B

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-4)^2 + 3$.

Odpowiedź: $(4, 3)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-4)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 4$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-4)^2 + 3$.

Odpowiedź: 3

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 3$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

Grupa C

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-5)^2 + 4$.

Odpowiedź: $(5, 4)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-5)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 5$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-5)^2 + 4$.

Odpowiedź: 4

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 4$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

Grupa D

1. Odczytaj wierzchołek $f(x) = (x-6)^2 + 5$.

Odpowiedź: $(6, 5)$

Postać kanoniczna bezpośrednio podaje obie współrzędne.

2. Podaj oś symetrii $f(x) = (x-6)^2 - 1$.

Odpowiedź: $x = 6$

Oś symetrii przechodzi pionowo przez wierzchołek.

3. Oblicz minimum $f(x) = 2(x-6)^2 + 5$.

Odpowiedź: 5

Kwadrat jest nieujemny i może być zerem.

4. Czy $y = -x^2 + 5$ ma ramiona w górę?

Odpowiedź: Nie, w dół.

Decyduje ujemny współczynnik przy x².

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $f(x) = (x-3)^2 + 2$. Uczeń podaje wierzchołek.

Odpowiedź: $(3, 2)$

W nawiasie mamy x-p, więc argument wierzchołka to p.

2. $f(x) = -(x-3)^2 + 2$.

Odpowiedź: Największa wartość to 2.

Ujemny kwadrat nie przekracza zera; funkcja ma maksimum, a nie minimum.

3. $f(x) = (x-3)^2$. Uczeń rozwija nawias.

Odpowiedź: $x^2 - 6x + 9$

W kwadracie różnicy pominięto składnik -2 px.

Grupa B

1. $f(x) = (x-4)^2 + 3$. Uczeń podaje wierzchołek.

Odpowiedź: $(4, 3)$

W nawiasie mamy x-p, więc argument wierzchołka to p.

2. $f(x) = -(x-4)^2 + 3$.

Odpowiedź: Największa wartość to 3.

Ujemny kwadrat nie przekracza zera; funkcja ma maksimum, a nie minimum.

3. $f(x) = (x-4)^2$. Uczeń rozwija nawias.

Odpowiedź: $x^2 - 8x + 16$

W kwadracie różnicy pominięto składnik -2 px.

5 / Matematyka w świecie

1. Ogród ma boki x oraz $10 - x$ metrów. Wyznacz x, dla którego pole jest największe.

Odpowiedź: 5

$P = x(10-x) = -(x-5)^2 + 25$. Maksimum dla x=5.

2. Umowny model zysku to $Z(x) = -(x-5)^2 + 25$ zł. Podaj największy zysk i wielkość x.

Odpowiedź: $Z_{max} = 25,\ x = 5$

Odejmowany kwadrat jest najmniejszy i równy 0 w x=5.

3. W doświadczeniu ruch opisuje model $h(t) = t(10-t)$ cm dla $0 \le t \le 10$. Oblicz czas i wysokość maksimum.

Odpowiedź: $t = 5,\ h = 25$

Zera to 0 i 10; ich środek to 5. Po podstawieniu wysokość wynosi 25.

4. Wierzchołek modelu $f(x) = a(x-5)^2$ jest znany, a $f(7) = 12$. Odtwórz a i podaj wzór.

Odpowiedź: $a = 3,\ f(x) = 3(x-5)^2$

Po podstawieniu argumentu odległego o 2 od wierzchołka otrzymujemy $4a = 12$.