Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Przekątna i ramię trapezu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Opuszczamy z D wysokość DE na dłuższą podstawę AB. W trójkącie prostokątnym BED przekątna BD jest przeciwprostokątną, a $BE = BD\cos\alpha = 39 \cdot \frac{12}{13} = 36$. Z twierdzenia Pitagorasa wysokość wynosi $DE = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15$. W trapezie równoramiennym odcinki pozostające przy końcach dłuższej podstawy są równe, więc $AE = \frac{40}{2} = 20$. W trójkącie AED stosujemy ponownie twierdzenie Pitagorasa: $AD = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Sprawdzenie istnienia: krótsza podstawa ma długość $36 - 20 = 16$, która jest dodatnia.

Odpowiedź: 25

1 / Od schematu do wyzwania

1. Trapez równoramienny ma podstawy 18, 6 i wysokość 9. Oblicz ramię.

Odpowiedź: $3\sqrt{13}$

Rzut ramienia to 6; Pitagoras daje $l = \sqrt{36 + 81} = 3\sqrt{13}$.

2. Trapez równoramienny ma podstawy 18, 6 i wysokość 9. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 15

Rzut przekątnej ma długość połowy sumy podstaw, czyli 12. Pitagoras: $d = \sqrt{144 + 81} = 15$.

3. Trapez równoramienny ma podstawy 18, 6 i ramię $3\sqrt{13}$. Oblicz pole.

Odpowiedź: 108

Rzut ramienia to 6. Wysokość: $\sqrt{117 - 36} = 9$. Pole to 108.

4. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 18, 6, a przekątna 15. Oblicz wysokość i ramię.

Odpowiedź: $9;\ 3\sqrt{13}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Rzut przekątnej to 12, więc wysokość wynosi 9. Rzut ramienia to 6; jego długość to k√13.

5. Wykaż, że w trapezie równoramiennym o podstawach a,b, ramieniu l i przekątnej d zachodzi $d^2 = l^2 + ab$.

Odpowiedź: $d^2 = l^2 + ab$

Niech h oznacza wysokość. Mamy $d^2 = h^2 + (a+b)^2/4$ oraz $l^2 = h^2 + (a-b)^2/4$. Po odjęciu równań dostajemy $d^2 - l^2 = ((a+b)^2 - (a-b)^2)/4 = ab$.

6. Trapez równoramienny ABCD ma AB równoległe do CD i $AB = 2CD$. Przekątna AC dzieli kąt DAB na połowy. Wykaż, że ten kąt ma 60°.

Odpowiedź: 60°

Z dwusiecznej i równoległości podstaw mamy $DAC = CAB = ACD$, więc $AD = CD = b$. Rzut ramienia AD na AB ma długość $(AB - CD)/2 = b/2$. Cosinus kąta DAB wynosi więc $(b/2)/b = 1/2$. Kąt przy dłuższej podstawie jest ostry, zatem ma 60 stopni.

2 / Małe kroki

1. Trapez równoramienny ma podstawy 18 i 6. Oblicz poziomy rzut każdego ramienia na dłuższą podstawę.

Odpowiedź: 6

Połowa różnicy podstaw: $(18 - 6)/2 = 6$.

2. Trapez ma podstawy 18, 6 i wysokość 9. Oblicz pole.

Odpowiedź: 108

$P = (18 + 6) \cdot 9/2 = 108$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podstawy trapezu: 12, 6; wysokość: 3. Oblicz pole.

Odpowiedź: 27

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 18 i 6. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 6

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 12

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 9, rzut przekątnej 12. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 15

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

Grupa B

1. Podstawy trapezu: 16, 8; wysokość: 4. Oblicz pole.

Odpowiedź: 48

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 24 i 8. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 8

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 16

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 12, rzut przekątnej 16. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 20

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

Grupa C

1. Podstawy trapezu: 20, 10; wysokość: 5. Oblicz pole.

Odpowiedź: 75

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 30 i 10. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 10

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 20

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 15, rzut przekątnej 20. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 25

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

Grupa D

1. Podstawy trapezu: 24, 12; wysokość: 6. Oblicz pole.

Odpowiedź: 108

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 36 i 12. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 12

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 24

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 18, rzut przekątnej 24. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 30

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Podstawy równoramiennego trapezu: 18, 6.

Odpowiedź: 6

Trzeba wziąć połowę różnicy, a nie połowę sumy podstaw.

2. Podstawy: 18, 6; wysokość 9.

Odpowiedź: 108

Pominięto dzielenie sumy podstaw przez 2.

3. Rzut przekątnej to 12, wysokość 9.

Odpowiedź: 15

Prostopadłych odcinków nie dodajemy; stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

Grupa B

1. Podstawy równoramiennego trapezu: 24, 8.

Odpowiedź: 8

Trzeba wziąć połowę różnicy, a nie połowę sumy podstaw.

2. Podstawy: 24, 8; wysokość 12.

Odpowiedź: 192

Pominięto dzielenie sumy podstaw przez 2.

3. Rzut przekątnej to 16, wysokość 12.

Odpowiedź: 20

Prostopadłych odcinków nie dodajemy; stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

5 / Matematyka w świecie

1. Trapezowy ogród równoramienny ma podstawy 18, 6 m i szerokość 9 m. Oblicz powierzchnię.

Odpowiedź: 108 m^2

Stosujemy pole trapezu: połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. Trapezową tablicę o podstawach 18, 6 dm i wysokości 9 dm trzeba wzmocnić przekątną. Ile dm listwy wymaga jedno wzmocnienie?

Odpowiedź: 15 dm

Przyjmijmy pomocniczo $k = 3$. Rzut przekątnej to 4 k, wysokość 3 k, a długość przekątnej 5 k.

3. Przekrój umownego kanału ma kształt trapezu o podstawach 18, 6 cm i wysokości 9 cm. Oblicz pole przekroju.

Odpowiedź: 108 cm^2

Pole przekroju obliczamy wzorem na pole trapezu.

4. Trapez ma podstawy 18, 6 m oraz pole 108 m². Odtwórz wysokość.

Odpowiedź: 9 m

$h = 2P/(a+b) = 216/24 = 9$ m.