Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Środek i równanie okręgu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Środek okręgu jest środkiem średnicy AB, zatem $y_B = 2 \cdot (-6) - (-15) = 3$. Z różnic współrzędnych S i A mamy $r^2 = 12^2 + (-9)^2 = 225$. Podstawiamy środek i kwadrat promienia do wzoru okręgu: $(x+8)^2 + (y+6)^2 = 225$.

Odpowiedź: A; A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Odcinek A=(-10,-5), B=(20,35) jest średnicą. Wyznacz równanie okręgu.

Odpowiedź: $(x-5)^2 + (y-15)^2 = 625$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 5$. Środek to (k,3 k). Różnice końców wynoszą 6 k i 8 k, więc średnica ma 10 k, a promień 5 k.

2. Okrąg ma równanie $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 625$. Sprawdź, czy P=(20,-25) leży na okręgu.

Odpowiedź: Tak.

Kwadrat odległości od środka to $(15)^2 + (-20)^2 = 625$, czyli r².

3. Okrąg $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 625$ odbito względem osi Oy. Zapisz równanie obrazu.

Odpowiedź: $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 625$

Odbicie zmienia znak pierwszej współrzędnej środka; promień pozostaje ten sam.

4. Okrąg ma środek (5,-5) i jest styczny do osi Ox. Wyznacz jego równanie i punkty przecięcia osi Oy.

Odpowiedź: $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25;\ (0,-5)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 5$. Promień jest odległością środka od Ox, czyli k. Dla x=0 równanie daje (y+k)²=0; jedyny punkt to (0,-k).

5. Wykaż, że środki wszystkich okręgów przechodzących przez różne punkty A i B leżą na symetralnej AB.

Odpowiedź: Są jednakowo odległe od A i B.

Jeżeli S jest środkiem takiego okręgu, SA i SB są promieniami, zatem SA=SB. Zbiór punktów równoodległych od końców odcinka to jego symetralna.

6. A=(-5,0), B=(5,0). Wyznacz zbiór wszystkich punktów P spełniających $PA^2 + PB^2 = 100$ i uzasadnij jego kształt.

Odpowiedź: $x^2 + y^2 = 25$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 5$. Dla P=(x,y) suma kwadratów wynosi $(x+5)^2 + y^2 + (x-5)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 50$. Równość z 100 jest równoważna $x^2 + y^2 = 25$. To okrąg o środku (0,0) i promieniu k.

2 / Małe kroki

1. Okrąg ma środek (5,-5) i promień 25. Zapisz równanie.

Odpowiedź: $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 625$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 5$. Stosujemy $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ z a=k,b=-k,r=5 k.

2. Odcinek A=(-10,-5), B=(20,35) jest średnicą. Wyznacz środek okręgu.

Odpowiedź: $(5, 15)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 5$. Środek średnicy ma współrzędne będące średnimi końców: (k,3 k).

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Okrąg: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(5, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2 + y^2 = 25$. Podaj promień.

Odpowiedź: 5

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 10. Podaj promień.

Odpowiedź: 5

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (5,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-5, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa B

1. Okrąg: $(x-6)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(6, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=36$. Podaj promień.

Odpowiedź: 6

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 12. Podaj promień.

Odpowiedź: 6

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (6,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-6, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa C

1. Okrąg: $(x-7)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(7, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=49$. Podaj promień.

Odpowiedź: 7

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 14. Podaj promień.

Odpowiedź: 7

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (7,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-7, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

Grupa D

1. Okrąg: $(x-8)^2+(y+2)^2=9$. Podaj środek.

Odpowiedź: $(8, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

2. Okrąg: $x^2+y^2=64$. Podaj promień.

Odpowiedź: 8

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

3. Średnica ma długość 16. Podaj promień.

Odpowiedź: 8

Promień jest połową średnicy.

4. Odbij punkt (8,-2) względem Oy.

Odpowiedź: $(-8, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. S=(2,-3), promień 5.

Odpowiedź: $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

2. S=(0,0), promień 5.

Odpowiedź: $x^2+y^2=25$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

3. S=(2,-3), odbicie względem Oy.

Odpowiedź: $(-2,-3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

Grupa B

1. S=(2,-3), promień 6.

Odpowiedź: $(x-2)^2+(y+3)^2=36$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

2. S=(0,0), promień 6.

Odpowiedź: $x^2+y^2=36$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

3. S=(2,-3), odbicie względem Oy.

Odpowiedź: $(-2,-3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

5 / Matematyka w świecie

1. Okrągła rabata ma środek (5,-5) i promień 25 m na planie. Zapisz równanie jej brzegu.

Odpowiedź: $(x-5)^2+(y+5)^2=625$

Podstawiamy środek i kwadrat promienia do standardowego równania.

2. Końcami średnicy okrągłej tablicy są (-10,-5) i (20,35) dm. Oblicz pole powierzchni do pokrycia folią.

Odpowiedź: 625π dm^2

Przyjmijmy pomocniczo $k=5$. Średnica ma długość 10 k, promień 5 k, a pole 25πk².

3. Tor w płaskim modelu ma równanie $(x-5)^2+(y+5)^2=625$ w cm. Czy punkt (20,-25) leży na torze?

Odpowiedź: Tak.

Przyjmijmy pomocniczo $k=5$. Po podstawieniu kwadrat odległości od środka jest równy 25 k², tak jak prawa strona równania.

4. Brzeg okrągłego obszaru opisuje równanie $(x-5)^2+(y+5)^2=625$. Odtwórz środek i średnicę.

Odpowiedź: $S=(5,-5);\ d=50$

Środek odczytujemy z nawiasów. Promień jest pierwiastkiem prawej strony, a średnica jest dwa razy większa.