Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Optymalizacja pola bocznego walca

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Z warunku $2r + h = 10$ otrzymujemy $h = 10 - 2r$. Wymiary są dodatnie, więc $0 < r < 5$. Pole boczne to $P(r) = 2\pi r(10 - 2r) = -4\pi r^2 + 20\pi r$. Parabola jest skierowana ramionami w dół. Pierwsza współrzędna wierzchołka to $r = \frac{-20\pi}{2\cdot(-4\pi)} = \frac{5}{2}$. Wartość należy do dziedziny, więc daje maksimum.

Odpowiedź: $P(r) = 2\pi r(10 - 2r),\ r \in (0, 5); r = \frac{5}{2}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Dodatnie boki prostokąta wynoszą x i $8 - x$. Wyznacz największe pole.

Odpowiedź: 16

$P = x(8 - x) = -(x - 4)^2 + 16$. Argument 4 należy do (0,8).

2. Pole modeluje $P(x) = -2x^2 + 16x$ dla $0 < x < 8$. Wyznacz maksimum i jego argument.

Odpowiedź: $x = 4,\ P = 32$

$P = -2(x - 4)^2 + 32$; kwadrat może być zerem w dziedzinie.

3. Dla prostokąta o obwodzie 16 znajdź wszystkie długości boku x, dla których pole wynosi 15.

Odpowiedź: $x = 3, 5$

$x(8 - x) = 15$ jest równoważne $(x - 4)^2 = 1$. Oba wyniki są dodatnie i mniejsze od 8.

4. $P(x) = -(x - 4)^2 + 10$ rozpatrujemy tylko dla $x \in [0, 3]$. Wyznacz maksimum.

Odpowiedź: 9

Przedział leży na lewo od wierzchołka, więc P rośnie. Maksimum jest na prawym końcu: $P(3) = 9$.

5. Udowodnij bez pochodnych: jeśli x,y>0 i $x + y = 8$, to $xy \leq 16$. Ustal równość.

Odpowiedź: $x = y = 4$

$(x - y)^2 \geq 0$ daje $4xy \leq (x + y)^2 = 64$. Równość występuje tylko dla x=y.

6. Dla dodatnich x,y,z o sumie 12 wykaż $xy + yz + zx \leq 48$ i podaj wszystkie trójki, dla których zachodzi równość.

Odpowiedź: $x = y = z = 4$

Suma kwadratów różnic $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ jest nieujemna. Stąd $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Po dodaniu $2(xy+yz+zx)$ dostajemy $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$. Równość wymaga zerowania wszystkich trzech różnic.

2 / Małe kroki

1. Boki to x i $8 - x$. Zapisz pole P(x).

Odpowiedź: $P(x) = x(8 - x)$

Pole prostokąta jest iloczynem długości boków.

2. Podaj argument maksimum $P(x) = -(x - 4)^2 + 5$.

Odpowiedź: 4

Maksimum jest w wierzchołku paraboli.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $P(x) = -x^2 + 4x$. Podaj argument maksimum.

Odpowiedź: 2

$p = -4/(-2) = 2$.

2. Oblicz $P(2)$ dla $P(x) = x(4 - x)$.

Odpowiedź: 4

$P(2) = 2^2 = 4$.

3. Dodatnie boki prostokata to x i $4 - x$. Podaj dziedzine x.

Odpowiedź: $0 < x < 4$

Oba boki muszą być dodatnie.

4. Czy parabola $y = -2x^2 + 1$ ma maksimum czy minimum?

Odpowiedź: Maksimum.

Ujemny współczynnik przy x² oznacza ramiona w dół.

Grupa B

1. $P(x) = -x^2 + 6x$. Podaj argument maksimum.

Odpowiedź: 3

$p = -6/(-2) = 3$.

2. Oblicz $P(3)$ dla $P(x) = x(6 - x)$.

Odpowiedź: 9

$P(3) = 3^2 = 9$.

3. Dodatnie boki prostokąta to x i $6 - x$. Podaj dziedzinę x.

Odpowiedź: $0 < x < 6$

Oba boki muszą być dodatnie.

4. Czy parabola $y = -3x^2 + 1$ ma maksimum czy minimum?

Odpowiedź: Maksimum.

Ujemny współczynnik przy x² oznacza ramiona w dół.

Grupa C

1. $P(x) = -x^2 + 8x$. Podaj argument maksimum.

Odpowiedź: 4

$p = -8/(-2) = 4$.

2. Oblicz $P(4)$ dla $P(x) = x(8 - x)$.

Odpowiedź: 16

$P(4) = 4^2 = 16$.

3. Dodatnie boki prostokąta to x i $8 - x$. Podaj dziedzinę x.

Odpowiedź: $0 < x < 8$

Oba boki muszą być dodatnie.

4. Czy parabola $y = -4x^2 + 1$ ma maksimum czy minimum?

Odpowiedź: Maksimum.

Ujemny współczynnik przy x² oznacza ramiona w dół.

Grupa D

1. $P(x) = -x^2 + 10x$. Podaj argument maksimum.

Odpowiedź: 5

$p = -10/(-2) = 5$.

2. Oblicz $P(5)$ dla $P(x) = x(10 - x)$.

Odpowiedź: 25

$P(5) = 5^2 = 25$.

3. Dodatnie boki prostokąta to x i $10 - x$. Podaj dziedzinę x.

Odpowiedź: $0 < x < 10$

Oba boki muszą być dodatnie.

4. Czy parabola $y = -5x^2 + 1$ ma maksimum czy minimum?

Odpowiedź: Maksimum.

Ujemny współczynnik przy x² oznacza ramiona w dół.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $P(x) = x(4 - x)$ dla dodatnich boków.

Odpowiedź: $D = (0, 4)$

Na końcach jeden bok ma długość zero i figura jest niedopuszczalna.

2. $P(x) = -x^2 + 4x$. Uczeń podaje maksimum.

Odpowiedź: max $P = 4$

Przy podstawianiu argumentu wierzchołka x=h pominięto składnik -x². Poprawna wartość to -h²+2 h²=h².

3. $P(x) = -x^2 + 4x$. Uczeń opisuje ramiona.

Odpowiedź: Ramiona są skierowane w dół.

Współczynnik przy x² jest ujemny.

Grupa B

1. $P(x) = x(6 - x)$ dla dodatnich boków.

Odpowiedź: $D = (0, 6)$

Na końcach jeden bok ma długość zero i figura jest niedopuszczalna.

2. $P(x) = -x^2 + 6x$. Uczeń podaje maksimum.

Odpowiedź: max $P = 9$

Przy podstawianiu argumentu wierzchołka x=h pominięto składnik -x². Poprawna wartość to -h²+2 h²=h².

3. $P(x) = -x^2 + 6x$. Uczeń opisuje ramiona.

Odpowiedź: Ramiona są skierowane w dół.

Współczynnik przy x² jest ujemny.

5 / Matematyka w świecie

1. Ogród ma boki x oraz $12 - x$ metrów. Wyznacz x, dla którego pole jest największe.

Odpowiedź: 6

$P = x(12 - x) = -(x - 6)^2 + 36$. Maksimum dla x=6.

2. Umowny model zysku to $Z(x) = -(x - 6)^2 + 36$ zł. Podaj największy zysk i wielkość x.

Odpowiedź: $Z_{max} = 36,\ x = 6$

Odejmowany kwadrat jest najmniejszy i równy 0 w x=6.

3. W doświadczeniu ruch opisuje model $h(t) = t(12 - t)$ cm dla $0 \leq t \leq 12$. Oblicz czas i wysokość maksimum.

Odpowiedź: $t = 6,\ h = 36$

Zera to 0 i 12; ich środek to 6. Po podstawieniu wysokość wynosi 36.

4. Wierzchołek modelu $f(x) = a(x - 6)^2$ jest znany, a $f(8) = 12$. Odtwórz a i podaj wzór.

Odpowiedź: $a = 3,\ f(x) = 3(x - 6)^2$

Po podstawieniu argumentu odległego o 2 od wierzchołka otrzymujemy $4a = 12$.